ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

1.

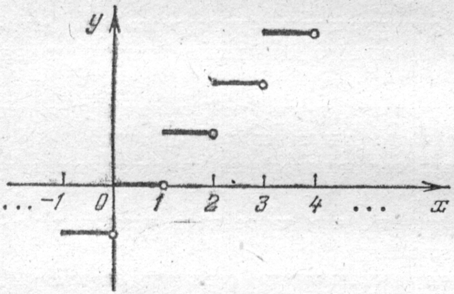

Рис. 1.

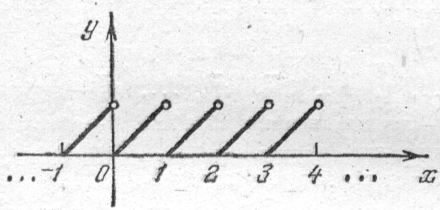

Рис. 2.

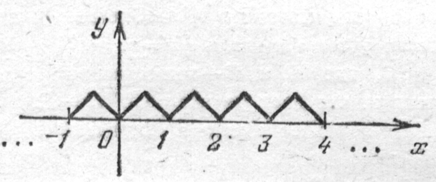

Рис. 3.

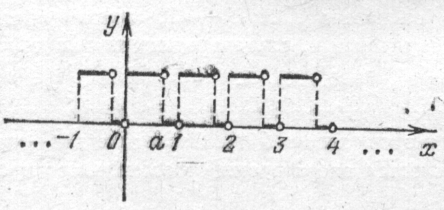

Рис. 4.

3. Функция периодична с периодом 1 по обеим переменным, $f(x, y)=0$ в треугольнике $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$, $x+y<1$ и $f(x, y)=1$ в треугольнике $x+y \geqslant 1$; $x<1$; $y<1$.

4. $\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$. **6.** $\left[\frac{\lg b}{\lg a}\right]$.

10. $\frac{n(6m-2n^2-3n+5)}{6}$, где $n=[\sqrt{m}]$.

12. a) 3; b) 1; c) 11.

14. Число, запись которого состоит из d единиц, $d=(m, n)$.

16. a^d-1, где $d=(m, n)$.

17. 13, если $a-5$ делится на 13; если нет, то 1.

18. a) $3=8 \cdot 843-21 \cdot 321$; b) $1=2249 \cdot 75217-7192 \cdot 23521$; c) $11= =53 \cdot 6787-50 \cdot 7194$.

23. a) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$; b) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

24. $\prod p^{\left[\frac{\lg n}{\lg p}\right]}$. **25.** $n!=\prod\limits_p p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots}$.

26. $n-1-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]-\ldots \geqslant 0$ и равенство имеет место только при $n=2^k$.

27. $\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{m}{p^k}\right] \cdot \left[\frac{n-m}{p^k}\right] \geqslant 0$. Поэтому все простые числа входят в $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ с неотрицательными показателями.

31. Непосредственно следует из двух предыдущих задач.

32. $\frac{abc\,(a, b, c)}{(a, b)\,(a, c)\,(b, c)}$.

35. Если бы все простые множители числа $N=4p_1 \ldots p_m-1$ имели вид $4n+1$, то такой же вид имело бы и число N. Таким образом, для любого конечного множества простых чисел найдется простое число вида $4n-1$, не входящее в это множество.

38. $x=m^2+2mn-n^2$, $y=\pm(m^2-2mn-n^2)$.

39. a) $x \equiv 6 \pmod{13}$; b) $x \equiv 14 \pmod{21}$; c) $x \equiv 15 \pmod{49}$.

40. a) $x \equiv \pm 5 \pmod{13}$; b) решений нет; c) $x \equiv \pm 8 \pmod{31}$.

41. a) $x_1 \equiv 1$, $x_2 \equiv -3 \pmod{17}$; b) $x_1 \equiv -7$, $x_2 \equiv 4 \pmod{19}$;
c) $x_1 \equiv 3$, $x_2 \equiv 7$, $x_3 \equiv 9 \pmod{19}$; d) $x \equiv 3 \pmod{11}$;
e) $x_1 \equiv -3$, $x_2 \equiv -4$, $x_3 \equiv 7 \pmod{37}$.

42. a) $x_1 \equiv 10$, $x_2 \equiv 23 \pmod{26}$; b) $x_1 \equiv 3$, $x_2 \equiv 14$, $x_3 \equiv 25 \pmod{33}$.

45. При $p \neq 2$ одно из чисел $x-1$, $x+1$ взаимно просто с p. Поэтому $x \equiv \pm 1 \pmod{p^m}$.

46. При $m=1$ — единственное решение $x \equiv 1 \pmod 2$. При $m=2$ — два решения $x \equiv \pm 1 \pmod 4$. При $m \geqslant 3$ одно из чисел $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x-1}{2}$

нечетное, другое делится на 2^{m-2}. Поэтому имеется четыре решения: $x \equiv \pm 1 \pm 2^{m-1} \pmod{2^m}$.

47. Сравнение $a_1 + m_1 t \equiv a_2 \pmod{m_2}$ имеет единственное решение t_0 по модулю m_2 и $x \equiv a_1 + m_1 t_0$ есть единственное решение по модулю $m_1 m_2$.

48. Доказывается методом индукции.

49. Следует из результатов задач 45, 46, 48.

50. При $n > 2$ решения разбиваются на пары противоположных, произведение каждой пары сравнимо с -1. Число пар равно 1, если решений два, или четному числу, если решений больше двух.

51. Если $x_0^2 \equiv -1 \pmod{p}$, то $1 \equiv x_0^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$, откуда $\frac{p-1}{2}$ четное.

56. 3.

57. Наличие k цифр в периоде в десятичном разложении рационального числа r, начиная с $(l+1)$-й цифры, обозначает, что $10^{l+k}r - 10^l r$ есть целое число. При $r = \frac{a}{m}$, $(m, 10) = 1$, $(m, a) = 1$ это равносильно $10^l a (10^k - 1) \equiv 0 \pmod{m}$, причем k — минимальное из возможных. Следовательно, k не зависит от a и является делителем $\varphi(m)$.

58. 2 при $n \equiv 0 \pmod 3$ и -1 при $n \equiv \pm 1 \pmod 3$.

59. Так как $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, ответ следует искать по модулю 21; $n \equiv 11, 15, 16 \pmod{21}$.

60. $n \equiv pa - (p-1)\, 2^a \pmod{p\,(p-1)}$; $a = 0, 1, \ldots, p-2$.

61. Если существует такое c, что $c^2 \equiv 2 \pmod{p}$, то $n \equiv pa \pm (p-1) c^a \pmod{p\,(p-1)}$, $a = 0, 1, \ldots, p-2$; если же такого c не существует, то $n \equiv pa \pm (p-1)\, 2^{\frac{a}{2}} \pmod{p\,(p-1)}$, $a = 0, 2, 4, \ldots, p-3$.

62. $2^{2x} \equiv 4 \pmod 6$, так что $2^{2^{2x}} \equiv 2 \pmod 7$ и $u_n \equiv 2 \pmod 7$ при $n \geqslant 3$.

68. Если $(n_1, n_2) = 1$, то $g(n_1 n_2) = \sum\limits_{d_1 \mid n_1} \sum\limits_{d_2 \mid n_2} f(d_1 d_2) = g(n_1) g(n_2)$. Аналогично для $h(n)$.

70. Следует из формулы обращения и формулы d) предыдущей задачи.

75. $$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{k^\alpha}\right) \mu(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{k^\alpha l^\alpha}\right) \mu(k) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{n^\alpha}\right) \sum_{k \mid n} \mu(k) = f(x).$$

82. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \zeta(s) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s).$$

83. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^s}=\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)$.

84. 1. 85. $\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}$. 86. $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{8}{\pi^2}$. 87. $\frac{6}{\pi^2}$.

91. 1) кольцо вычетов по модулю 4; 2) поле предыдущей задачи; 3) 0, 1, a, $a+1$ при $1+1=0$, $a^2=a$, $a(a+1)=0$, $(a+1)^2=a+1$; 4) 0, 1, a, $a+1$ при $1+1=0$, $a^2=0$, $(a+1)^2=1$, $a(a+1)=a$. Все эти кольца коммутативны и ассоциативны.

92. Кольцо состоит из элементов $\{ma\}$; $m=0, 1, \ldots, pq-1$. Элемент a можно выбрать так, что имеет место один из четырех случаев: 1) $a^2=a$ (кольцо изоморфно кольцу вычетов по модулю pq); 2) $a^2=0$ (нулевое умножение); 3) $a^2=pa$; 4) $a^2=qa$.

98. $d=(m, n)$; $m=dm_1$, $n=dn_1$. Если m_1, n_1 оба нечетные, $(a^m+b^m, a^n+b^n)=a^d+b^d$, в противном случае (a^m+b^m, a^n+b^n) равен 1 или 2.

100. $$\frac{2}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\ldots$$ $$\ldots+\frac{1}{(p-1)1}\equiv-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \pmod p.$$ Вычеты чисел, обратных к числам 1, 2, ..., $(p-1)$, отличаются от них лишь порядком. Поэтому $-\frac{2}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)\equiv 1^2+2^2+\ldots+(p-1)^2=$ $=\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}\equiv 0 \pmod p$ при $p\geqslant 5$.