ГЛАВА II

101. 46. **102.** x^4+4. **103.** $x=-\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$.

104. $x=-2$; $y=\frac{3}{2}$; $z=2$; $t=-\frac{1}{2}$.

105. a) $117+44i$; b) -556; c) $-76i$.

106. В том и только в том случае, когда: 1) ни один из сомножителей не равен нулю; 2) сомножители имеют вид $(a+bi)$ и $\lambda(b+ai)$, где λ — вещественное число.

107. a) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\frac{2ab}{a^2+b^2}$; c) $5+5i$; d) $\frac{-1-32i}{25}$.

108. a) $x=1+i$, $y=i$; b) $x=2+i$, $y=2-i$; c) $x=3-11i$, $y=-3-9i$, $z=1-7i$.

109. a) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

110. a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$; b) a^3+b^3; c) $2(a^3+b^3+c^3)-$ $-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc$.

112. a) $\pm(1+i)$; b) $\pm(2-2i)$; c) $\pm(2-i)$; d) $\pm(1+4i)$;

e) $\pm(5+6i)$; f) $\pm(1-3i)$; g) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$;

h) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; i) $\frac{\sqrt{2}(\pm 1\pm i)}{2}$;

j) $i^{\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\alpha=0, 1, 2, 3$.

113. a) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; b) $x_1=2+i$; $x_2=1-3i$; c) $x_1=1-i$; $x_2=\frac{4-2i}{5}$.

114. a) $1\pm 2i$; $-4\pm 2i$; $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$; b) $2\pm i\sqrt{2}$; $-2\pm 2i\sqrt{2}$; $(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$.

115. a) $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{i}{2}$; b) $\pm 4\pm i$.

116. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}-\frac{p}{4}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}+\frac{p}{4}}$.

119. a) $\cos 0+i\sin 0$; b) $\cos\pi+i\sin\pi$; c) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;

d) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

f) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; g) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

h) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; i) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

j) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

120. $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

121. $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

122. a) $\sqrt{10}(\cos 18°26'6''+i\sin 18°26'6'')$;

b) $\sqrt{17}(\cos 345°57'48''+i\sin 345°57'48'')$;

c) $\sqrt{5}(\cos 153°26'6''+i\sin 153°26'6'')$.

123. a) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

b) Луч, выходящий из начала координат под углом $\frac{\pi}{6}$ к положительному направлению вещественной оси.

124. a) Внутренность круга радиуса 2 с центром в начале координат.

b) Внутренность и контур круга радиуса 1 с центром в точке (0, 1).

c) Внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (1, 1).

126. Планета вращается по круговой орбите радиуса R. Спутник вращается вокруг планеты по круговой орбите радиуса ρ, совершая n оборотов, пока планета делает один оборот.

127. Если $r^2=a^2+b^2$, т. е. если окружность проходит через начало координат, то $z^{-1}=u+vi$ проходит прямую $2au-2bv=1$. Эта прямая перпендикулярна вектору, исходящему из начала координат в центр и отстоит от начала на расстоянии $\frac{1}{2r}$. Если же $r^2\neq a^2+b^2$, то z^{-1} описывает окружность с центром в точке $\frac{-a+bi}{r^2-a^2-b^2}$ и с радиусом $\frac{r}{|r^2-a^2-b^2|}$.

128.

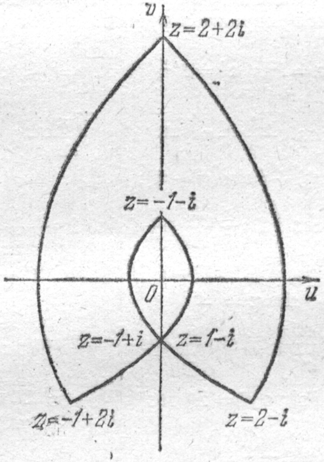

Рис. 5.

Образы точек $1-i$ и $-1+i$ сливаются и дают самопересечение.

129. $r=\dfrac{1}{1+\frac{R}{a}\cos\varphi}$ (коническое сечение с фокусом в начале координат, с эксцентриситетом $\frac{R}{a}$ и параметром 1).

130. Для разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $a>0$ или $a=0$, $b=0$. В первом случае $z=\frac{b^2-a^2}{2a}-bi$, во втором $z>0$.

131.

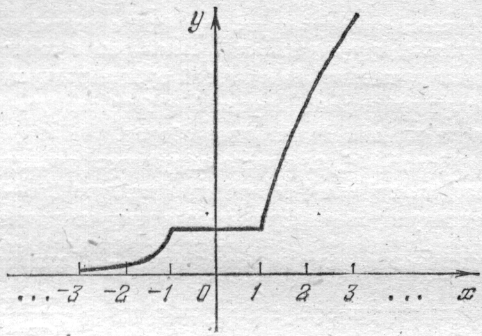

Рис. 6.

132. $\sqrt{13}-1$.

133. Тождество выражает известную теорему геометрии: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

134. Положив $z=t^2$, $z'=t'^2$, $\sqrt{zz'}=tt'$, сведем задачу к предыдущей.

136. a) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]$;

b) $\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

137. a) $2^{12}(1+i)$; b) $2^9(1-i\sqrt{3})$; c) $(2-\sqrt{3})^{12}$; d) -64.

141. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha=$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

142. $\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$.

143. a) $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$;

b) $-1+i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$;

c) $1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$;

d) 1; -1; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$; $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$; $-\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

144. a) $$\sqrt[6]{5}\,(\cos 8^\circ 51'18'' + i \sin 8^\circ 51'18'')\,\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k = \cos 120^\circ k + i \sin 120^\circ k$, $k=0, 1, 2$;

b) $$\sqrt[6]{10}\,(\cos 113^\circ 51'18'' + i \sin 113^\circ 51'18'')\,\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k = \cos 120^\circ k + i \sin 120^\circ k$, $k=0, 1, 2$;

c) $$\sqrt[10]{13}\,(\cos 11^\circ 15'29'' + i \sin 11^\circ 15'29'')\,\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k = \cos 72^\circ k + i \sin 72^\circ k$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

145. a) $$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi + i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right),$$

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

b) $$\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi + i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right),$$

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

c) $$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi + i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right),$$

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

146. a) $\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$;

b) $\cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^2 x\sin^6 x + \sin^8 x$;

c) $6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$;

d) $7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$.

147. $$\frac{2\,(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1 - 15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}.$$

148. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2\cos^{n-2} x\sin^2 x + C_n^4\cos^{n-4} x\sin^4 x - \ldots$

$\sin nx = C_n^1\cos^{n-1} x\sin x - C_n^3\cos^{n-3} x\sin^3 x + \ldots$

149. a) $\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; b) $\dfrac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$;

c) $\dfrac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$;

d) $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$;

e) $\dfrac{1}{128}(\sin 8x + 2\sin 6x - 2\sin 4x - 6\sin 2x)$.

152. $$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \ldots + (-1)^k\frac{m(m-k-1)\ldots(m-2k+1)}{k!}(2\cos x)^{m-2k} + \ldots$$

153. a) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

154. $\frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\sin\frac{n\pi}{6}$. **158.** $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

159. $S=1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\ldots+a^k\cos k\varphi$.

Составим $T=a\sin\varphi+a^2\sin 2\varphi+\ldots+a^k\sin k\varphi$;

$S+Ti=1+a(\cos\varphi+i\sin\varphi)+a^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots$
$\ldots+a^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$.

Положив $\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$, имеем

$$S+Ti=1+a\alpha+a^2\alpha^2+\ldots+a^k\alpha^k=\frac{a^{k+1}\alpha^{k+1}-1}{a\alpha-1}=$$

$$=\frac{a^{k+1}\alpha^{k+1}-1}{a\alpha-1}\cdot\frac{a\alpha^{-1}-1}{a\alpha^{-1}-1}=\frac{a^{k+2}\alpha^k-a^{k+1}\alpha^{k+1}-a\alpha^{-1}+1}{a^2-a(\alpha+\alpha^{-1})+1}.$$

Отсюда $S=\frac{a^{k+2}\cos k\varphi-a^{k+1}\cos(k+1)\varphi-a\cos\varphi+1}{a^2-2a\cos\varphi+1}$.

160. $\frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$.

163. a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x$.

164. $\frac{n}{2}-\frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$.

166. a) $\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

b) $\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

167. a) $-3,\ \frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$; b) $-3,\ \frac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$;

c) $-7,\ -1\pm i\sqrt{3}$; d) $-1,\ \frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$; e) $2,\ -1\pm\sqrt{3}$;

f) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$;

g) $-(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}),\ \frac{-2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})$;

h) $-2i,\ i,\ i$; i) $-1-i,\ -1-i,\ 2+2i$;

j) $-(a+b),\ \frac{a+b}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(a-b)$; k) $-(a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2})$,

$$\frac{a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(a\sqrt[3]{f^2g}-b\sqrt[3]{fg^2}).$$

168. Если оба кубических радикала α и β в формуле Кардана имеют рациональные значения, то корни равны $2a$, $-a \pm bi\sqrt{3}$ при $a=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $b=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Обратно, если корни равны $2a$, $-a \pm bi\sqrt{3}$, то уравнение есть $x^3-3(a^2-b^2)x-2a(a^2+3b^2)=0$ и все корни в формуле Кардана извлекаются.

169. a) 2,1149, $-0{,}2541$, $-1{,}8608$; b) 1,5981, 0,5115, $-2{,}1007$.

170. $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27(\alpha^3-\beta^3)^2=$
$=-27((\alpha^3+\beta^3)^2-4\alpha^3\beta^3)=-27q^2-4p^3$.

172. Левая часть представится в виде

$$\alpha^5+\beta^5+5(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-a)(\alpha\beta-a)-2b.$$

Положив $\alpha\beta=a$, получим $x=\alpha+\beta$, где

$$\alpha=\sqrt[5]{b+\sqrt{b^2-a^5}},\quad \beta=\sqrt[5]{b-\sqrt{b^2-a^5}}.$$

173. a) $\pm\sqrt{2}$, $1\pm i\sqrt{3}$; b) $-1\pm\sqrt{6}$, $\pm i\sqrt{3}$; c) $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; e) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, $1\pm i$; f) $\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$, $\frac{5\pm i\sqrt{7}}{2}$; g) $\pm i$, $1\pm i\sqrt{2}$; h) $\pm\sqrt{5}$, $\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$; i) $\pm i$, $-1\pm i\sqrt{6}$; j) $-2\pm 2\sqrt{2}$, $-1\pm i$; k) 1, 3, $1\pm\sqrt{2}$; l) 1, -1, $1\pm 2i$; m) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}$;

n) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$.

174. $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}+mx+n\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}-mx-n\right);$$

откуда $x_1x_2=\frac{\lambda}{2}+n$; $x_3x_4=\frac{\lambda}{2}-n$; $\lambda=x_1x_2+x_3x_4$.

175. a) ± 1; b) 1, $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) ± 1, $\pm i$;

d) ± 1, $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$;

f) ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$;

g) ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$,
$\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

176. a) -1; b) $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm i$; d) $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; f) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) $\pm \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\pm \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

177. Если ε — первообразный корень степени n из 1, то и $\bar{\varepsilon}$, сопряженное с ε, — тоже первообразный корень степени n из 1. При этом $\varepsilon \neq \pm 1$, так как $n > 2$.

178. a) Обозначая $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{16} + i\sin\frac{2k\pi}{16}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;
показателю 2 принадлежит ε_8;
показателю 4 принадлежат ε_4, ε_{12};
показателю 8 принадлежат ε_2, ε_6, ε_{10}, ε_{14};
первообразные корни 16-й степени ε_1, ε_3, ε_5, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{15}.

b) Обозначая $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{20} + i\sin\frac{2k\pi}{20}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;
показателю 2 принадлежит ε_{10};
показателю 4 принадлежат ε_5, ε_{15};
показателю 5 принадлежат ε_4, ε_8, ε_{12}, ε_{16};
показателю 10 принадлежат ε_2, ε_6, ε_{14}, ε_{18};
первообразные корни 20-й степени ε_1, ε_3, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}.

c) Обозначая $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{24} + i\sin\frac{2k\pi}{24}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;
показателю 2 принадлежит ε_{12};
показателю 3 принадлежат ε_8, ε_{16};
показателю 4 принадлежат ε_6, ε_{18};
показателю 6 принадлежат ε_4, ε_{20};
показателю 8 принадлежат ε_3, ε_9, ε_{15}, ε_{21};
показателю 12 принадлежат ε_2, ε_{10}, ε_{14}, ε_{22};
первообразные корни 24-й степени ε_1, ε_5, ε_7, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}, ε_{23}.

179. a) $X_1(x) = x - 1$; b) $X_2(x) = x + 1$; c) $X_3(x) = x^2 + x + 1$;
d) $X_4(x) = x^2 + 1$; e) $X_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
f) $X_6(x) = x^2 - x + 1$; g) $X_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
h) $X_8(x) = x^4 + 1$; i) $X_9(x) = x^6 + x^3 + 1$;
j) $X_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$;
k) $X_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
l) $X_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$; m) $X_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$;
n) $X_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1$.

180. $X_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$.

181. $X_{p^m}(x) = x^{(p-1)p^{m-1}} + x^{(p-2)p^{m-1}} + \ldots + x^{p^{m-1}} + 1$.

182. 0, если $n > 1$. 183. $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, если $\varepsilon \neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$, если $\varepsilon = 1$.

184. $\frac{2}{1-\varepsilon}$. 185. a) $-\frac{n}{2}$; b) $-\frac{n}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. 186. a) 1; b) 0; c) -1.

187. Разделим обе части уравнения $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ на x^3. После очевидного преобразования получим

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Уравнению $z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$ удовлетворяет $z = 2\cos\frac{4\pi}{7}$. Отсюда $t = 2\sin\frac{\pi}{14} = -2\cos\frac{4\pi}{7}$ удовлетворяет уравнению $t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$.

188. $$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t} = \frac{1}{t^n}\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1}(t + \varepsilon_k - \varepsilon_s) =$$
$$= \frac{1}{t^n}\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1}\left[t - \varepsilon_k\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k} - 1\right)\right] = \frac{1}{t^n}\prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1}[t - \varepsilon_k(\varepsilon_s - 1)] =$$
$$= \frac{1}{t^n}\prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}[t - \varepsilon_k(\varepsilon_s - 1)] = \frac{1}{t^n}\prod_{s=0}^{n-1}[t^n - (\varepsilon_s - 1)^n] =$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1}[t^n - (\varepsilon_k - 1)^n].$$

189. Если z удовлетворяет данному уравнению, то $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$. Множество всех точек, расстояния от которых до двух данных точек находятся в данном отношении, есть окружность (в частном случае — прямая при $|\lambda| = |\mu|$).

190. а) Имеем $\frac{x+1}{x-1} = \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Отсюда $x = \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1}$. Преобразование последнего выражения дает $x_k = i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$;

b) $$x_k = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1;$$

c) $$x_k = \frac{a}{\varepsilon_k\sqrt[n]{2} - 1},$$

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

191. Пусть $A = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда $\frac{1+ix}{1-ix} = \eta_k^2$, где $\eta_k = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{2m} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2m}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Отсюда

$$x = \frac{\eta_k^2 - 1}{i(\eta_k^2+1)} = \frac{\eta_k - \eta_k^{-1}}{i(\eta_k + \eta_k^{-1})} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + 2k\pi}{2m}.$$

192. Следуя указанию, получим

$$\mu(1+\lambda x)^n + \mu^{-1}(1+\lambda^{-1}x)^n = 0,$$

откуда

$$x_k = -\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi - 2\varphi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi - 2\varphi - 2n\alpha}{2n}}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

193. Пусть $\alpha^a = 1$, $\beta^b = 1$. Тогда $(\alpha\beta)^{ab} = (\alpha^a)^b \cdot (\beta^b)^a = 1$.

194. Существуют целые u и v такие, что $au + bv = 1$. Пусть ε — корень степени ab из 1. Тогда $\varepsilon = \varepsilon^{au+bv} = \varepsilon^{au}\cdot\varepsilon^{bv}$. Первый множитель есть корень из 1 степени b, второй — степени a.

195. Пусть α и β — первообразные корни степеней a и b из 1. Пусть $(\alpha\beta)^s = 1$. Тогда $\alpha^{bs} = 1$; $\beta^{as} = 1$, так что bs делится на a, as делится на b. Следовательно, s делится на a, на b и на ab, т. е. $\alpha\beta$ есть первообразный корень степени ab из 1. Если, скажем, α принадлежит показателю $a_1 < a$, β — показателю $b_1 \leqslant b$, то $\alpha\beta$ принадлежит показателю $a_1 b_1 < ab$ и не может быть первообразным.

196. Непосредственно следует из задачи 195.

198. Пусть $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{nd} + i\sin\frac{2k\pi}{nd}$ — первообразный корень степени nd из 1, т. е. k и n взаимно просты. Разделим k на n, получим $k = nq + r$, где $0 < r < n$. Отсюда

$\varepsilon_k = \cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d}$, т. е. ε_k — одно из значений корня степени d из $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$; η_r — первообразный корень степени n из 1, так как всякий общий делитель r и n есть общий делитель k и n.

Пусть теперь $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$ — первообразный корень степени n из 1, т. е. r и n взаимно просты.

Составим $\varepsilon_q = \cos\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\frac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} = \cos\frac{2\pi(r+nq)}{nd} + i\sin\frac{2\pi(r+nq)}{nd}$, где $q = 0, 1, 2, \ldots, d-1$, и покажем, что ε_q —

первообразный корень степени nd из 1. Действительно, если бы $r+nq$ и nd делились оба на некоторое простое p, то на p делились бы n и r, а это невозможно.

200. $\frac{1}{(1-x^p)(1-x^q)}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha(n)x^n$, где $\alpha(n)$ — число представлений числа n в виде $pu+qv$, $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$. Поэтому $\frac{1-x}{(1-x^p)(1-x^q)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha(n)-\alpha(n-1))x^n$. Полином X_{pq} получается из этого ряда умножением на $1-x^{pq}$ и степень его равна $(p-1)(q-1)$. Следовательно, $X_{pq}=1+\sum_{n=1}^{(p-1)(q-1)}(\alpha(n)-\alpha(n-1))x^n$. Далее, при $n<pq$ $\alpha(n)=0$ или 1, ибо равенство $n=pu+qv$ возможно только в том случае, если u и v равны наименьшим неотрицательным решениям сравнений $pu\equiv n \pmod q$ и $qv\equiv n \pmod p$.

201. Из результатов предшествующих четырех задач следует, что коэффициенты $X_n(x)$ равны 0, 1, -1, если n делится на одно или два простых нечетных числа. Наименьшее число, имеющее три простых нечетных делителя, есть $105=3\cdot 5\cdot 7$.

202. Корнями $X_n(x^p)$ являются все первообразные корни степени np и первообразные корни степени n.

203. Сумма первообразных корней мультипликативна, равна 0 для $n=p^k$, $k\geqslant 2$, и равна -1 для $n=p$.

204. $x^n-1=\prod_{d\mid n}X_d(x)$. Остается применить мультипликативный аналог формулы обращения (задача 67).

205. Если $n=p^\alpha$, где p — простое, то $X_n(1)=p$. Если $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, то $X_n(1)=X_{n'}(1)$, где $n'=p_1\ldots p_k$. Если $n=p_1\ldots p_k$ и $k\geqslant 2$, то $X_n(1)=\frac{X_{n'}(1^{p_1})}{X_{n'}(1)}=1$. Здесь $n'=p_2\ldots p_k$.

206. 1) Пусть n — нечетное, большее единицы. Тогда (задача 197) $X_n(-1)=X_{2n}(1)=1$.

2) Пусть $n=2^k$, тогда $X_n=\frac{x^n-1}{x^{\frac{n}{2}}-1}=x^{\frac{n}{2}}+1$ и $X_n(-1)$ равно 0, если $k=1$, и равно 2, если $k>1$.

3) Пусть $n=2n_1$, где n_1 — нечетное, большее единицы. Тогда (задача 197) $X_n(-1)=X_{n_1}(1)$ и, следовательно, $X_n(-1)$ или равно p, если $n_1=p^\alpha$ (p — простое), или равно 1, если $n_1\neq p^\alpha$.

4) Пусть $n=2^k n_1$, где $k>1$, а $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные нечетные простые числа). В этом случае (задача 199) $X_n(x)=X_{2p_1p_2\ldots p_s}(x^\lambda)$, где $\lambda=2^{k-1}p_1^{\alpha_1-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}$. Отсюда следует, что $X_n(-1)=X_n(1)=1$.

207. $S=\sum_{x=0}^{n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{x=y}^{y+n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}$ при любом целом y

$$S'=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2};\quad S'S=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}S=\sum_{y=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{-y^2}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}\right)=$$

$$=\sum_{y=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys+s^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys}\right)=n+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}(\varepsilon^{2s})^y=n$$

при n нечетном;

$$SS'=n+n\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]$$

при n четном $\left(\text{так как } \sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2sy}=0 \text{ при } 2s, \text{ не делящемся на } n\right)$.

Итак, $|S|=\sqrt{n}$, если n — нечетное, и $|S|=\sqrt{n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]}$, если n — четное.

208. $r_n^n=|u_n^n|=\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2}\longrightarrow e^a$; $\arg u_n^n=n\varphi_n$, где $\sin\varphi_n=\frac{b}{nr_n}\longrightarrow 0$. Считая $\varphi_n\longrightarrow 0$, получим $n\varphi_n=\frac{b}{r_n}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\longrightarrow b$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n=e^a(\cos b+i\sin b)$.

209. $(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$ превращается в $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, т. е. в правило сложения показателей при умножении степеней с одинаковым основанием. Аналогично, формула Муавра превращается в $\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{i\varphi n}$.

210. a) -1; b) $-i$.

211. a) $\pi i+2k\pi i$; b) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi i}{4}+2k\pi i$.

212. $i\arccos x+2k\pi i$.

213. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}$. Пусть $\operatorname{tg}\varphi=x$. Тогда $e^{2i\varphi}=\frac{1+ix}{1-ix}$, $\quad\varphi=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}+k\pi$.

215. В формуле $\alpha=a+bj$ коэффициенты a и b независимо принимают по p значений.

216. В поле GF (p) отличных от нуля квадратов имеется $\frac{p-1}{2}$, именно, $(\pm 1)^2$, $(\pm 2)^2$, ..., $\left(\pm \frac{p-1}{2}\right)^2$. Остальные $\frac{p-1}{2}$ элементов — не квадраты. Если m — один из них, то все остальные суть mc^2, $c=1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Пусть $j^2=m$ и $j_1^2=m_1=mc^2$. Тогда отображение $a+bj_1 \longrightarrow a+bcj$ будет, очевидно, изоморфизмом.

217. Неквадратами в $\mathbb{R}$ являются все отрицательные числа и они отличаются от -1 положительным множителем, т. е. квадратом в $\mathbb{R}$.

218. Любые два числа, частные которых не являются квадратами рациональных чисел, порождают неизоморфные квадратичные расширения.