ГЛАВА III

219. a) $(4, 4, 0, 1)$; b) $(0, 0, 0, 0)$; c) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

220. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$; g) $(af-be+cd)\,E$.

221. a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

222. $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{n}$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

Предел первого множителя равен 1,

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi = \alpha \lim_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \alpha.$$

Поэтому

$$\lim \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ -\dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

223. a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; d) 13.

224. $\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$.

226. Строки AB суть строки A, умноженные справа на матрицу B. Строки матрицы AB суть линейные комбинации строк B с коэффициентами, составляющими соответствующие строки матрицы A. Столбцы AB суть столбцы B, умноженные слева на матрицу A. Столбцы AB суть линейные комбинации столбцов A с коэффициентами, составляющими соответствующие столбцы B.

227. При умножении слева переставятся местами строки с номерами i и j. При умножении справа — переставятся столбцы.

228. При умножении слева к i-й строке добавится j-я, умноженная на α. При умножении справа к j-му столбцу добавится i-й, умноженный на α.

229. Да, нужно умножить слева на $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

231. a) 5; b) 5; c) 1; d) $ab - c^2 - d^2$; e) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; f) $\sin(\alpha - \beta)$; g) $\cos(\alpha + \beta)$; h) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; i) 0; j) 0; k) $(b-c)(d-a)$; l) $4ab$; m) -1; n) ε.

232. a) 1; b) 2; c) $2a^2(a+x)$; d) 1; e) -2; f) $-3i\sqrt{3}$.

233. Да, $(\bar 5, \ \bar 3) = \bar 6 \, (\bar 3, \ \bar 7)$.

234. Если m — составное число, то не обязательно, например, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod 4$. Если хотя бы один элемент взаимно прост с m, то да.

235. Число транспозиций нечетное. **236.** a) 10; b) 18; c) 36.

237. a) $i=8$; $k=3$; b) $i=3$; $k=6$. **238.** C_n^2. **239.** $C_n^2 - I$.

240. a) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; b) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

242. Транспозиция соседних элементов меняет число инверсий на одну единицу и, если инверсии есть, можно уменьшить их число на одну единицу.

243. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

244. a) (15) (24) (3); b) (1325674); c) (123456).

245. $(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)$.

246. При $n=4m$: $(1, 5, \ldots, 4m-3, 4m, 4m-4, \ldots, 4)\cdot(3, 7, \ldots, 4m-1, 4m-2, 4m-6, \ldots, 2)$, при $n=4m+2$: $(1, 5, \ldots, 4m+1, 4m, 4m-4, \ldots, 4)\cdot(3, 7, \ldots, 4m-1, 4m+2, 4m-2, \ldots, 2)$.

248. a) со знаком $+$; b) со знаком $+$.

249. a) не входит; b) входит. **250.** $i=1$; $k=4$.

251. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2 + a_1b_4c_2d_3 -$$
$$- a_1b_4c_3d_2 - a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3 + a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 -$$
$$- a_2b_4c_1d_3 + a_2b_4c_3d_1 + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - a_3b_2c_1d_4 +$$
$$+ a_3b_2c_4d_1 + a_3b_4c_1d_2 - a_3b_4c_2d_1 - a_4b_1c_2d_3 + a_4b_1c_3d_2 +$$
$$+ a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_4b_3c_1d_2 + a_4b_3c_2d_1.$$

252. $$-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

253. Со знаком $+$. **254.** Со знаком $(-1)^{C_n^2}$.

255. Каждое слагаемое определителя содержит три сомножителя из последних трех строк и хотя бы один из них равен 0.

256. a) $n!$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; c) $n!$.

257. При транспонировании определитель не изменится и превратится в сопряженное комплексное число.

258. От замены строк столбцами определитель: 1) не изменится; 2) умножится на -1.

259. $(-1)^{n-1}\Delta$.

260. Суммы алгебраических дополнений всех строк, кроме одной, равны нулю.

261. Умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **262.** Нет.

263. Умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

264. $A_{ij}=0$ при $i<j$, $A_{ii}=1$,

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{j,\,j+1} & a_{j,\,j+2} & \ldots & & a_{ji} \\ 1 & a_{j+1,\,j+2} & \ldots & & a_{j+1,\,i} \\ & 1 & \ldots & & a_{j+2,\,i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{i-1,\,i} \end{vmatrix} \text{ при } i>j.$$

266. a) $3a-b+2c+d$; b) $4t-x-y-z$; c) $2a-b-c-d$.

268. $(mq-np)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. **269.** a) 128; b) $(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$.

271. 5. **273.** $-1\,487\,600$. **274.** $-29\,400\,000$. **275.** 48.

276. 1. **277.** 160. **278.** 12. **279.** 900.

280. 394. **281.** 665. **282.** $a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)$.

283. $(b_1-b_2)(b_3-b_4)(b_5-b_6)(b_7b_{10}-b_8b_9)$.

284. $-2(x^3+y^3)$. **285.** x^2z^2. **286.** $(af-be+cd)^2$.

287. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

288. $(x+1)(x^2-x+1)^2$. **289.** $x^2(x^2-1)^4$. **290.** $4\sin^4\varphi$.

291. $2x^3y(x-y)^6$.

292. $n!$. **293.** $(a^2-b^2)^n$. **294.** $b_1b_2\ldots b_n$. **295.** $-2(n-2)!$

296. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. **297.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

298. $x_1y_n\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})$. **299.** $\dfrac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$.

300. $x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n$.

301. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

302. $x^n+(-1)^{n-1}y^n$. **303.** 1.

304. $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\ldots+(-1)^nb_1b_2\ldots b_n$.

305. $a(a+b)(a+2b)\ldots[a+(n+1)b]$. **306.** α^n. **307.** $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

308. $n+1$. **309.** $na_1+(n-1)a_2+\ldots+2a_{n-1}+a_n$.

310. $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. **311.** $x^n-C_{n-1}^1x^{n-2}+C_{n-2}^2x^{n-4}-\ldots$

312. $$\frac{[c+\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}-[c-\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}=c^n-C_{n-1}^1c^{n-2}ab+C_{n-2}^2c^{n-4}a^2b^2-\ldots$$

313. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^na_n]$. **314.** 1. **315.** 1. **316.** 1.

317. $\dfrac{C_{m+n}^{n+1}C_{m+n-1}^{n+1}\ldots C_{m+n-k+1}^{n+1}}{C_{k+n}^{n+1}C_{k+n-1}^{n+1}\ldots C_{n+1}^{n+1}}$. **318.** $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$. **319.** $(x-1)^n$.

320. $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)$. **321.** $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

322. $(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

323. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

324. $x(a_1-x)\ldots(a_n-x)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a_1-x}+\ldots+\dfrac{1}{a_n-x}\right)$.

325. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\ldots(x_n-a_n)\left(1+\dfrac{a_1}{x_1-a_1}+\ldots+\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\right)$.

327. $\Delta_1=2a_1$, $\Delta_2=-(a_1-a_2)^2$; $\Delta_k=0$ при $k\geqslant 3$.

328. Пусть Δ'_j — определитель матрицы, полученной из A посредством замены j-го столбца на j-й столбец матрицы CB. Тогда

$$\det(A+CB)=\det A+\sum_{j=1}^{n}\Delta'_j=\det A+\sum_{i,j}A_{ij}c_ib_j=\det A+B\tilde{A}C.$$

329. $1+c_1b_1+c_2b_2+\ldots+c_nb_n$.

330. $d_\Gamma \det A^\Gamma$ равно определителю матрицы, которая получится из A, если ее столбцы с номерами, составляющими множество Γ, заменить на соответствующие столбцы матрицы D.

331. $\det(A+xE)=x^n+s_1x^{n-1}+\ldots+s_n$, где $s_k=\sum\limits_{|\Gamma|=k}\det A^\Gamma$;

в частности, $s_n=\det A$, $s_1=\operatorname{Sp} A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

332. $1+2(a_1+\ldots+a_n)-\sum\limits_{i>k}(a_i-a_k)^2=(1+a_1+\ldots+a_n)^2-$

$$-n(a_i^2+\ldots+a_n^2).$$

333. $1+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+x_i)+\sum\limits_{i>k}(a_i-a_k)(x_k-x_i)=$

$$=(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)-$$

$$-n(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

334. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i)\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i-a_ib_i}\right)$.

335. $x^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right)$.

336. $x^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right)$.

337. $\dfrac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$. **338.** $\dfrac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y}$.

339. $\dfrac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$, где $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k-x)$.

340. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\ldots a_n+b_1b_2a_3\ldots a_n+\ldots+b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n)$.

341. $(-1)^n 2^{n-1}a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

342. $h(x+h)^n$. **343.** $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-ax_{k,k})$. **344.** $(1-x^n)^{n-1}$.

346. $-a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

347. $(-1)^n (x_1+\ldots+x_n)(y_1+\ldots+y_n)+$
$+(-1)^{n-1}(n-1)(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)$.

348. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. 349. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$.

350. $a_0x^n(a_1-b_1)\ldots(a_n-b_n)$. 351. $1!\,2!\ldots n!$.

352. $$(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}a_i\cdot\prod_{i>k}(a_i-a_k)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{a_if'(a_i)},$$

где $f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)$.

353. $\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$. 354. $\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

355. $\dfrac{1}{1!\,2!\ldots(n-1)!}\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

357. $\prod\limits_{k>i}(b_ka_i-a_kb_i)$. 358. $\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{x_i-1}\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

359. $\prod\limits_{i<k}(a_i-a_k)(a_ia_k-1)$.

360. $2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\prod\limits_{i>k}(\cos\varphi_i-\cos\varphi_k)$.

361. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\sin\alpha_0\sin\alpha_1\ldots\sin\alpha_n\prod\limits_{i<k}(\cos\alpha_i-\cos\alpha_k)$.

362. $[x_1\ldots x_n-(x_1-1)\ldots(x_n-1)]\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

363. $(x_1+\ldots+x_n)\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

364. $f_{n-s}\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$, где f_m обозначает сумму всевозможных произведений чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взятых по m.

365. $[2x_1\ldots x_n-(x_1-1)\ldots(x_n-1)]\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

366. $1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,x^{\frac{n(n-1)}{2}}(y-x)^n$. 367. $(y-x)^{k(n-k)}$.

368. $1!\,2!\,3!\ldots(k-1)!\,x^{\frac{k(k-1)}{2}}(y_1-x)^k(y_2-x)^k\ldots$
$\ldots(y_{n-k}-x)^k\prod\limits_{n-k\geqslant i>j\geqslant 1}(y_i-y_j)$.

369. $(x-n)^{n+1}$.

370. $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\ldots[x^2-(2m-1)^2]$, если $n=2m$; $x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\ldots(x^2-4m^2)$, если $n=2m+1$.

371. $$\prod_{i>k}(a_i-a_k)\cdot\prod_{i>k}(b_i-b_k)\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}f(a_i)},$$

где $f(x)=(x+b_1)\ldots(x+b_n)$.

372. $\dfrac{[1!\,2!\,\ldots\,(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\,\ldots\,(2n-1)!}$.

373. $\dfrac{\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{\Delta(1, 2, \ldots, n)}$, где Δ — определитель Вандермонда.

374. a) 24; b) 18;

c) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

375. a) 256; b) 78 400; c) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$. 376. $D\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$.

377. $\dfrac{(n!)^{n-1}}{(1!\,2!\,\ldots\,(n-1)!)^2}\prod\limits_{i>k}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$.

378. $\prod\limits_{i>k}(\alpha_i-\alpha_k)(\beta_i-\beta_k)$. 379. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$.

380. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)^2$.

381. Обозначим искомый определитель через Δ. Возведение в квадрат дает, что $|\Delta| = n^{\frac{n}{2}}$. С другой стороны, $\Delta = \prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}(\varepsilon^k-\varepsilon^s)$.

Полагаем $\varepsilon_1 = \cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n}$. Тогда $\varepsilon = \varepsilon_1^2$ и

$$\Delta = \prod_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}(\varepsilon^k-\varepsilon^s) = \prod \varepsilon_1^{k+s}\prod\left(\varepsilon_1^{k-s}-\varepsilon_1^{-k+s}\right) =$$

$$= \prod \varepsilon_1^{k+s}\cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}.$$

Далее, $\sin\dfrac{(k-s)\pi}{n} > 0$ при всех k, s. Следовательно,

$n^{\frac{n}{2}} = |\Delta| = \left|\prod 2\sin\dfrac{(k-s)\pi}{n}\right| = \prod 2\sin\dfrac{(k-s)\pi}{n}$. Поэтому

$$\Delta = n^{\frac{n}{2}}\,i^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}\varepsilon_1^{k+s} =$$

$$= n^{\frac{n}{2}}\,i^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\varepsilon_1^{\frac{n(n-1)^2}{2}} = n^{\frac{n}{2}}\,i^{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)^2} = n^{\frac{n}{2}}\,i^{-\frac{(n-1)(n+2)}{2}}.$$

382. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(a_0+a_1\varepsilon_k+a_2\varepsilon_k^2+\ldots+a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1}\right)$,

где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$.

384. 2^{n-1}, если n — нечетное; 0, если n — четное.

385. $(-2)^{n-1}(n-2p)$, если $(n, p)=1$; 0, если $(n, p)\neq 1$.

386. $2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left[\sin^n\frac{(n+2)\theta}{2}-\sin^n\frac{n\theta}{2}\right]$.

388. $$\prod_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}),$$

где $\varepsilon_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$.

389. $$\prod_{i=1}^{n}(a_1+a_2\rho_i+a_3\rho_i^2+\ldots+a_n\rho_i^{n-1}),$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — корни n-й степени из μ.

396. $(\det A)^m(\det B)^n$.

397. Для $n=1$ теорема тривиальна. Допустим, что теорема доказана для матриц «порядка» $n-1$ и в этом предположении докажем ее для матриц «порядка» n.

Сначала рассмотрим случай, когда A_{11} есть неособенная матрица:

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу C справа на матрицу D, где

$$D=\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} & \ldots & -A_{11}^{-1}A_{1n} \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

Тогда $C'=CD$ будет иметь вид

$$C'=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ A_{21} & A'_{22} & \ldots & A'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A'_{n2} & \ldots & A'_{nn} \end{pmatrix},$$

где $A'_{ik}=A_{ik}-A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1k}$.

Все матрицы, находящиеся в клетках матриц C, D и C', коммутируют друг с другом. Легко убедиться в том, что при выполнении этого условия теорема об определителе произведения двух матриц верна также и для формальных определителей.

Матрица D имеет формальный определитель E, настоящий определитель D равен 1.

Следовательно, $\det C=\det C'=\det A_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} A'_{22} & \ldots & A'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A'_{n2} & \ldots & A'_{nn} \end{pmatrix}$,

а для формального определителя B будем иметь $B=A_{11}\cdot B'$, где B' есть формальный определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ . & . & . \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу индукционного предположения

$$\det B' = \det \begin{pmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ . & . & . \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $\det B = \det A_{11} \cdot \det B' = \det C$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы избавиться от ограничения $\det A_{11} \neq 0$, можно поступить следующим образом. Введем в рассмотрение матрицу

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11} + \lambda E_m & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

и обозначим через $B(\lambda)$ ее формальный определитель.

Ввиду того что $\det (A_{11} + \lambda E_m) = \lambda^m + \dots \neq 0$, $\det C(\lambda) = \det B(\lambda)$. Оба эти определителя являются полиномами от λ. Сравнивая их свободные члены, получим $\det C = \det B$. Этим завершается доказательство.

398. $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\det A + \det B)(\det C + \det D) - \det U$, где $U = AC' + BD'$.