ГЛАВА IV

400. a) $x_1=3,\ x_2=x_3=1$; b) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-2$; c) $x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=3$; d) $x_1=3,\ x_2=4,\ x_3=5$; e) $x_1=x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1$; f) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1,\ x_4=-2$; g) $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=-3,\ x_4=3$; h) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1,\ x_4=-1$; i) $x_1=2,\ x_2=x_3=x_4=0$; j) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$; k) $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=-1,\ x_5=1$; l) $x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=-2,\ x_4=-2,\ x_5=1$.

401. $x_i=\frac{n}{2}-i+1$.

402.
$$\begin{aligned}
x_1 &= \quad\ -y_2+y_3-y_4+\ldots-y_{2m},\\
x_2 &= y_1 \qquad\quad -y_3+y_4-\ldots+y_{2m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{2m} &= y_1-y_2+y_3-\ldots+y_{2m-1}.
\end{aligned}$$

403. $x_1=1,\ x_2=4,\ x_3=\frac{1}{2}$.

406. $x_i=\dfrac{f(t)}{(t-\alpha_i)\,f'(\alpha_i)}$, где $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$.

407. $x_i = -f(\beta_i)/\varphi'(\beta_i)$, где $f(x) = (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$, $\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)$.

408. a) $x \equiv -1,\ y \equiv 2,\ z \equiv -1 \pmod 5$;

b) $x \equiv 4,\ y \equiv 4,\ z \equiv 3 \pmod{17}$.

410. a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

411. a) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$.

412. a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

413. $$\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{pmatrix}.$$

414. Элементарные преобразования над строками эквивалентны умножению слева на некоторые матрицы. Из $BA = E$ следует $A^{-1} = B = BE$.

415. $$\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \ldots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

416. $$\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1\cdot n & 1\cdot(n-1) & 1\cdot(n-2) & \ldots & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1) & 2\cdot(n-1) & 2\cdot(n-2) & \ldots & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2) & 2\cdot(n-2) & 3\cdot(n-2) & \ldots & 3\cdot 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \ldots & n\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

417. $$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \ldots & \varepsilon^{-n+1} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \ldots & \varepsilon^{-2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{-n+1} & \varepsilon^{-2n+2} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

418. $$\frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \dots & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

419. $$\frac{1}{\sin x \sin (n+1) x} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \sin x \sin nx & \sin x \sin (n-1) x & \dots & \sin^2 x \\ \sin x \sin (n-1) x & \sin 2x \sin (n-1) x & \dots & \sin 2x \sin x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^2 x & \sin 2x \sin x & \dots & \sin nx \sin x \end{pmatrix}.$$

420. $H^{-1} = D_1 H^{\top} D_2$, где $D_1 = \operatorname{diag} \dfrac{f(b_i)}{g'(-b_i)}$, $D_2 = \operatorname{diag} \dfrac{g(a_i)}{f'(-a_i)}$, $f(t) = (t+a_1) \dots (t+a_n)$, $g(t) = (t+b_1) \dots (t+b_n)$.

422. $$\frac{1}{2n^3}\begin{pmatrix} 2-n^2 & 2+n^2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2-n^2 & 2+n^2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2+n^2 & 2 & 2 & \dots & 2-n^2 \end{pmatrix}.$$

424. $$\frac{1}{c_n}\begin{pmatrix} -c_{n-1} & ab^{n-2} & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-2}b & -c_{n-1} & \dots & a^{n-2}b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{n-1} & ab^{n-2} & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad c_n = \frac{ab\,(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b}.$$

426. $(E + U + U^2 + \dots)^{-1} = E - U$.

427. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 2^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

428.
$$\frac{1}{a^n}\begin{pmatrix} a^{n-1} & -ba^{n-2} & -b(a-b)a^{n-3} & \dots & -b(a-b)^{n-2} \\ 0 & a^{n-1} & -ba^{n-2} & \dots & -ba(a-b)^{n-3} \\ 0 & 0 & a^{n-1} & \dots & -ba^2(a-b)^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -ba^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{n-1} \end{pmatrix}.$$

430.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $-E+\frac{1}{(n-1)^2}\begin{pmatrix}(n-1)C & -aC\\ 0 & (n-1)C\end{pmatrix}$, где $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

433. $E_n-\frac{1}{1+\sum a_i}BC$.

434. $\frac{1}{D}(c_{ij})$, где $D=(1+s_1)^2-ns_2$, $c_{ii}=(1+s_1-a_i)^2-(n-1)(s_2-a_i^2)$,

$c_{ij}=(1+s_1)(a_i+a_j)-s_2-na_ia_j$; $s_1=\sum a_i$, $s_2=\sum a_i^2$.

435. $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}-\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \dots & \lambda_1\lambda_n\\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2\lambda_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_n\lambda_1 & \lambda_n\lambda_2 & \dots & \lambda_n^2\end{pmatrix},$$

где $\mu=1+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n$.

437. $$\frac{1}{d}\begin{pmatrix}b_1c_1+d & b_2c_1 & \dots & b_nc_1 & -c_1\\ b_1c_2 & b_2c_2+d & \dots & b_nc_2 & -c_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_1c_n & b_2c_n & \dots & b_nc_n+d & -c_n\\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_n & 1\end{pmatrix},$$

где $d=a-b_1c_1-b_2c_2-\dots-b_nc_n$.

438.
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{2(n+1)}\begin{pmatrix}n & 0 & \dots & 0 & -1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \dots & 0 & n\end{pmatrix}.$$

440. $c_1x_1+\dots+c_nx_n=b_1y_1+\dots+b_ny_n=$
$$=C^{\top}A^{-1}B=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n\\ c_1 & \dots & c_n & 0\end{vmatrix}.$$

441. В первом случае может увеличиться не более чем на одну единицу, во втором — не более чем на 2.

442. a) 2, b) 2, c) 3, d) 3, e) 4, f) 3, g) 3, h) 6, i) 5.

443. a) $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$; b) $x_1=-\frac{11x_3}{7}$, $x_2=-\frac{x_3}{7}$;

c) $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=x_5$; d) $x_1=\frac{3x_3-13x_4}{17}$, $x_2=\frac{19x_3-20x_4}{17}$;

e) $x_1=\frac{-4x_4+7x_5}{8}$, $x_2=\frac{-4x_4+5x_5}{8}$, $x_3=\frac{4x_4-5x_5}{8}$;

f) $x_1=\frac{7}{6}x_5-x_3$, $x_2=\frac{5}{6}x_5+x_3$, $x_4=\frac{x_5}{3}$.

444. a) $x_3=2x_2-x_1$, $x_4=1$; b) система решений не имеет; c) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$; d) система решений не имеет; e) $x_1=-8$, $x_2=3+x_4$, $x_3=6+2x_4$; f) $x_1=\frac{1+x_5}{3}$, $x_2=\frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}$; g) система решений не имеет; h) $x_1=-\frac{x_5}{2}$, $x_2=-1-\frac{x_5}{2}$, $x_3=0$, $x_4=-1-\frac{x_5}{2}$; i) система решений не имеет; j) $x_1=\frac{1+5x_4}{6}$, $x_2=\frac{1-7x_4}{6}$, $x_3=\frac{1+5x_4}{6}$.

445. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

446. $\lambda=5$.

447. a) Если $(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0$, то $x=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$, $y=\frac{1}{\lambda+2}$, $z=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$. Если $\lambda=1$, то $x=1-y-z$. Если $\lambda=-2$, система решений не имеет.

b) Если $b(a-1)\neq 0$, то $x=\frac{2b-1}{b(a-1)}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$. Если $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, то $x=2-z$, $y=2$. Во всех остальных случаях система решений не имеет.

c) Если $b(a-1)(a+2)\neq 0$, то $x=z=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$, $y=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$. Если $a=-2$, $b=-2$, то $x=z=-1-2y$. Если $a=1$, $b=1$, то $x=1-y-z$. Во всех остальных случаях система решений не имеет.

d) Если $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$, то $x=\frac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda^2}$, $y=\frac{\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}$, $z=\frac{-4\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}$. Если $\lambda=1$, то $x=2-z$, $y=-7+2z$. Если $\lambda=0$, система решений не имеет.

e) Если $\lambda\neq 0$, то $x=1-\lambda$, $y=\lambda$, $z=0$. Если $\lambda=0$, то $x=1$, $z=0$, y любое.

f) Если $a\neq 0$, $b\neq\pm 1$, то $x=\frac{5-b}{a(b+1)}$, $y=\frac{-2}{b+1}$, $z=\frac{2b-2}{b+1}$. Если $b=1$, то $z=0$, $y=1-ax$. Если $a=0$, $b=5$, то $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{4}{3}$, x любое. В остальных случаях система решений не имеет.

448. Пусть

$$X=(x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*)^\top,\quad Y=(y_1^*,\ \ldots,\ y_m^*)^\top,\quad B=(b_1,\ \ldots,\ b_m)^\top,$$

$$C=(c_1,\ \ldots,\ c_n)^\top,\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $AX=B$, $A^\top Y=C$, $b_1y_1^*+\ldots+b_my_m^*=B^\top Y=X^\top A^\top Y=$ $=X^\top C=c_1x_1^*+\ldots+c_nx_n^*$. Независимость тривиальна.

449. a) $(1,\ -4,\ 3)$; b) $(1,\ -4,\ 3,\ 0)$, $(-1,\ -1,\ 0,\ 1)$;
c) $(1,\ -6,\ 9,\ 0)$, $(2,\ -3,\ 0,\ 9)$;
d) $(-1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $(-1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $(-1,\ 0,\ 0,\ 1)$.

450. Матрица, строками которой являются указанная фундаментальная система решений, есть $(-A^\top,\ E_{n-m})$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,\,m+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m,\,m+1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

451. В силу сказанного в указании и результата предыдущей задачи, достаточно рассмотреть связь между минорами и их алгебраическими дополнениями для матрицы $\begin{pmatrix} E_m & A \\ -A^\top & E_{n-m} \end{pmatrix}$. Непосредственное вычисление дает, что каждый минор из первых m строк здесь равен своему алгебраическому дополнению.

452. $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1-2x_1 & 1-2x_2 \end{pmatrix}$.

453. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, где $x+y+z+t=1$.

454. $X=(a,\ 1-a)^\top\cdot(b,\ 1-b)$.

456. Положив $A=PRQ$ (см. задачу 455), придем к уравнению $RQXPR=R$. Одно из решений: $X=Q^{-1}R^\top P^{-1}$.

457. Если $AX_1A=A$, то $X_2=X_1AX_1$ удовлетворяет обоим уравнениям системы. Приведенное выше решение задачи 455 тоже удовлетворяет обоим уравнениям.

459. $X=B_1^\top C_1$, причем $CB_1^\top=C_1B^\top=1$.

461. Если $AX=E_m$, то $AXA=A$, $XAX=X$. Обратно, если $(AX)\,A=A$ и A_1 — невырожденная квадратная субматрица A порядка m, то $(AX)\,A_1=A_1$, откуда $AX=E_m$.

462. $A\,(A^-B)=AA^-AX_0=AX_0=B$.

463. Пусть $AY_0=C$, $Z_0B=C$, C^- — полуобратная для C. Тогда $Y_0C^-Z_0$ — одно из решений задачи, ибо $AY_0C^-Z_0B=CC^-C=C$.

464. a) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$;
b) $(A+B)\,(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$.
c) Доказывается по индукции.

465. a) $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

467. $\operatorname{diag}(a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_{n-1} - a_{n-2}, -a_{n-1})$.

468. a) $c_1E + c_2A$; b) $c_1E + c_2A$;

c) $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t - 3x - u & t - 3y - v & t \end{pmatrix}$.

469. Достаточно умножить равенство $AB = BA$ справа и слева на A^{-1}.

470. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

471. Проверяется непосредственным вычислением.

472. Суммы диагональных элементов матриц AB и BA равны.

473. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & p-1 & 0 \end{pmatrix}$.

475. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $bc = -a^2$.

476. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2 = 1 - bc$.

477. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Если $A \neq 0$, но $a + d = 0$, $ad - bc = 0$, то решений не существует;

2) если $a + d \neq 0$, $(a - d)^2 + 4bc = 0$, $(a - d)$, b, c не равны нулю одновременно, то существует два решения:

$$X = \pm \frac{1}{2\sqrt{2(a+d)}} \begin{pmatrix} 3a + d & 2b \\ 2c & a + 3d \end{pmatrix};$$

3) если $a + d \neq 0$, $ad - bc = 0$, то существует два решения:

$$X = \pm \frac{1}{\sqrt{a+d}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

4) если $ad - bc \neq 0$, $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$, то существует четыре решения:

$$X = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 + a - d}{2} & b \\ c & \frac{\lambda^2 - a + d}{2} \end{pmatrix},$$

где $\lambda = \pm \sqrt{a + d \pm 2\sqrt{ad - bc}}$;

5) если $a-d=b=c=0$, то существует бесконечно много решений: $X=\pm\sqrt{a}\,E$ и $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, где x, y, z связаны соотношением $x^2+yz=a$.

478. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=aE+bI$, где $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $I^2=-E$ и, следовательно, соответствие $aE+bI\to a+bi$ есть изоморфизм.

479. Положим $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}=aE+bI+cJ+dK$, где $I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$. Отсюда следует, что произведение двух матриц вида $a+bI+cJ+dK$ есть матрица такого же вида. То же самое имеет место для суммы и разности, так что рассматриваемое множество матриц есть кольцо. Далее,

$$\det A=\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0,$$

как только $A\neq 0$. Следовательно, каждая отличная от 0 матрица имеет обратную, и из равенства $A_1A_2=0$ (или $A_2A_1=0$) при $A_1\neq 0$ следует $A_2=0$. Рассматриваемое кольцо матриц реализует так называемую алгебру кватернионов.

480. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

481. Если $A^3=E$, то $|A|^3=1$ и, в силу вещественности, $|A|=1$. Положим $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда, приравняв A^{-1} и A^2, легко получим, что $A=E$ или $a+d=-1$, $ad-bc=1$.

482. $A=\pm E$ или $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, причем $a^2+bc=\pm 1$.

483. Пусть $A=P_1R_1Q_1$, $B=P_2R_2Q_2$ (в обозначениях задачи 455). Ранг AB равен рангу $R_1Q_1P_2R_2=\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где C — матрица размеров $r_A\times r_B$, полученная из невырожденной матрицы Q_1P_2 вычеркиванием $n-r_A$ строк и $n-r_B$ столбцов, каждое же вычеркивание строки или столбца уменьшает ранг не более, чем на единицу.

484. $A=(b_1, b_2, b_3)^{\top}(c_1, c_2, c_3)$, причем $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0$.

485. $A=\pm(-E+(b_1, b_2, b_3)^{\top}(c_1, c_2, c_3))$, причем $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=2$.

486. Для $n=1$ утверждение тривиально. Пусть доказано, что $A_{k-1}=B_{k-1}C_{k-1}$. Положим

$$A_k=\begin{pmatrix} A_{k-1} & g \\ h & a_{kk} \end{pmatrix},\quad B_k=\begin{pmatrix} B_{k-1} & 0 \\ u & b_{kk} \end{pmatrix},\quad C_k=\begin{pmatrix} C_{k-1} & v \\ 0 & c_{kk} \end{pmatrix}.$$

Тогда $B_{k-1}v=g$, $uC_{k-1}=h$, откуда определятся u и v. Положив $b_{kk}=1$, найдем $c_{kk}=a_{kk}-uv$. Ясно, что $c_{kk}\neq 0$, иначе $\det A_k = \det B_k \det C_k = 0$.

487. Пусть $a_{k_1 1}$ — самый нижний отличный от нуля элемент первого столбца. За счет добавления k_1-й строки с подходящими множителями к лежащим выше, получим нули в первом столбце, кроме позиции k_1, 1. За счет добавления первого столбца с подходящими множителями к лежащим правее, получим нули в k_1-й строке. Затем возьмем самый нижний ненулевой элемент второго столбца, и т. д.

489. Определитель равен ± 1.

490. Следуя указанию, в конечное число шагов придем к матрице $\begin{pmatrix}\pm 1 & b\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}$; затем, за счет левого умножения на $A^{\mp b}$, аннулируем правый верхний угол. Наконец, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=CACA^{-1}CA$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}= = ACA^{-1}CAC$.

491. Разложение матрицы с определителем 1 в произведение матриц C и A^k (задача 490) содержит четное число множителей C. Но $CA^kC=B^k$.

492. За счет целочисленных элементарных преобразований над строками уменьшаем наименьший по модулю ненулевой элемент первого столбца до тех пор, пока все элементы не поделятся на наименьший по модулю. Перенесем его в первую строку, сделаем положительным и аннулируем все остальные элементы первого столбца. Затем, не трогая первой строки, обработаем второй столбец и т. д. Наконец, за счет добавления подходящих кратных нижележащих строк добьемся выполнения требований к элементам, лежащим выше диагонали.

493. $$F_n(p^m)=\frac{(p^{m+1}-1)(p^{m+2}-1)\ldots(p^{m+n-1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{n-1}-1)}.$$

494. Посредством целочисленных элементарных преобразований уменьшать наименьший по модулю ненулевой элемент до тех пор, пока все элементы матрицы не будут делиться на наименьший по модулю. Перевести его в левый верхний угол, сделать положительным и аннулировать все элементы первой строки и первого столбца. Затем повторить процесс для матрицы без первой строки и первого столбца и т. д.

495. В результате получится тождество Эйлера:

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2+ \\ +(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2.$$

496. Получается в результате применения теоремы об определителе произведения двух матриц к произведению матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ на транспонированную.

497. Получается в результате применения теоремы об определителе произведения к

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 \\ \cdot & \cdot \\ \bar{a}_n & \bar{b}_n \end{pmatrix}.$$

498. Непосредственно следует из тождества задачи 496. Знак равенства возможен только в том случае, если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ меньше двух, т. е. если строки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ пропорциональны.

499. Непосредственно следует из тождества задачи 497, с заменой b_i на $\bar{b}_i$. Знак равенства возможен только при пропорциональности строк $(a_1, \dots, a_n)$ и $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$.

500. Минор равен сумме произведений всех миноров m-го порядка, составленных из выбранных m строк первой матрицы на соответствующие миноры второй матрицы, составленные из выбранных m столбцов.

501. Каждый главный минор матрицы $A^\top A$ равен сумме квадратов миноров матрицы A, вырезанных из столбцов с номерами, равными номерам столбцов (и строк) рассматриваемого минора.

502. Сумма главных миноров порядка k матрицы $A^\top A$ (матрицы $AA^\top$) равна сумме квадратов всех миноров порядка k матрицы A.

503. Сумма равна $1 + s_1 + \dots + s_n$, где s_k — суммы главных миноров порядка k матрицы $A^\top A$. Такая сумма равна $\det(E + A^\top A)$ (см. задачу 330).

504. $AA^\top = \begin{pmatrix} BB^\top & 0 \\ 0 & CC^\top \end{pmatrix}$.

505. $(\det A)^2 = \left(\sum\limits_{\Gamma} \pm B_\Gamma C_{\Gamma'}\right)^2 \leqslant \sum\limits_{\Gamma} B_\Gamma^2 \sum\limits_{\Gamma'} C_{\Gamma'}^2 = \det BB^\top \det CC^\top$

(здесь Γ пробегает множество m-элементных подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$, $\Gamma' = N \setminus \Gamma$, n — порядок A, m — число строк матрицы B).

506. Однородная система $AX = 0$ имеет $n - m - k$ линейно независимых решений (быть может, больше). Примем их за строки матрицы D и положим $A_1 = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$. Тогда $(\det A_1)^2 = \det AA^\top \det DD^\top$.

С другой стороны, $(\det A_1)^2 \leqslant \det BB^{\top} \det \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}^{\top} = \det BB^{\top} \det CC^{\top} \det DD^{\top}$. Следовательно, $\det AA^{\top} \leqslant \det BB^{\top} \det CC^{\top}$.

507. Непосредственно следует из результата задачи 506, примененного к матрице $A^{\top}$.

508. Если матрица $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ квадратная, то $|\det A|^2 \leqslant \det BB^* \det CC^*$. Если $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ прямоугольная, то $\det AA^* \leqslant \det BB^* \det CC^*$. Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $\det AA^* \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{1k}|^2 \ldots \sum_{k=1}^{n} |a_{mk}|^2$.

509. Из 508 следует, что $|\det A|^2 \leqslant n^n M^{2n}$.

511. Граница $n^{\frac{n}{2}} M^n$ достигается, например, для модуля определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

512. Построим матрицу порядка $n = 2^m$ следующим образом. Прежде всего построим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Затем каждый ее элемент, равный 1, заменяем матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а каждый элемент, равный -1, заменяем матрицей $-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Получим матрицу 4-го порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С ней поступаем таким же образом, получим матрицу 8-го порядка и т. д.

514. 4 для $n = 3$; 48 для $n = 5$.

515. Результат тривиален, если $\det A = 0$. Если же $\det A \neq 0$, то матрица $\hat{A}^{\top}$, транспонированная к ассоциированной, равна $\Delta C A^{-1} C$, где $\Delta = \det A$, $C = \operatorname{diag}(1, -1, 1, \ldots)$. Поэтому $\det \hat{A} = \Delta^{n-1}$, $\hat{\hat{A}} = \Delta^{n-1} C (\Delta^{-1} CAC) C = \Delta^{n-2} A$.

516. Имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \\ 0 & \dots & E_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & \dots & 0 \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \det A = \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

517. Непосредственно следует из результата задачи 516, ибо $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ji}\det A$.

518. Непосредственно следует из теоремы об определителе произведения двух прямоугольных матриц.

519. Непосредственно следует из теоремы об определителе произведения двух прямоугольных матриц.

520. Упорядочим сочетания лексикографически, т. е. будем считать сочетание $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ предшествующим сочетанию $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$, если первая отличная от 0 разность в ряду i_1-j_1, i_2-j_2, ... отрицательна. Тогда каждый минор треугольной матрицы, номера столбцов которого образуют сочетание, предшествующее сочетанию из номеров строчек, равен 0.

521. В силу результата задачи 520 имеем для треугольной матрицы A:

$$\det A^{[m]} = \prod_{i_1<i_2<\ldots<i_m} a_{i_1i_1}a_{i_2i_2}\ldots a_{i_m i_m} = (\det A)^{C_{n-1}^{m-1}}.$$

522. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа. Если $a_1=1$, матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ имеет обратную } A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и поэтому алгебраические дополнения элементов первой строки A суть $1, a_2, \ldots, a_n$. Общий случай легко сводится к этому.

523. Из решения задачи 522 легко построить матрицы, ассоциированные к которым равны сомножителям, описанным в указании.

524. Положим

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ z_{21} & z_{22} & 0 & \dots & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_1z_{k1}+\ldots+a_{k-1}z_{k,k-1}+a_kz_{kk}=0$, $z_{kk}=\dfrac{d_{k-1}}{d_k}$, $d_i=(a_1, \ldots, a_i)$.

При таком выборе алгебраические дополнения пропорциональны $a_1, \ldots, a_n$ и коэффициент пропорциональности равен $\frac{1}{a_1} z_{22} \ldots z_{nn} = 1$.

526. Сконструировать целочисленную матрицу, алгебраические дополнения первой строки которой равны $u_1, \ldots, u_n$, и принять за ее первую строку $(a_1, \ldots, a_n)$.

528. $x_1'^2 + \frac{3}{4} x_2'^2 + \frac{4}{6} x_3'^2 + \ldots + \frac{n+1}{2n} x_n'^2$. Переменные $x_1', x_2', \ldots$ $\ldots, x_n'$ выражаются через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & & \ldots & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & & \ldots & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & \ldots & 1/4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

529. $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + x_4 + \ldots + x_n\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 -$$
$$- \left(x_3 + \frac{1}{2} x_4 + \ldots + \frac{1}{2} x_n\right)^2 -$$
$$- \frac{3}{4}\left(x_4 + \frac{1}{3} x_5 + \ldots + \frac{1}{3} x_n\right)^2 - \ldots - \frac{n-1}{2(n-2)} x_n^2.$$

531. Пусть l — некоторая линейная форма от переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Преобразуем форму f посредством преобразования с равным единице определителем, приняв форму l за последнюю из новых переменных. Затем сделаем треугольное преобразование формы f к каноническому виду.

Форма f примет вид
$$f = \alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2,$$
причем $x_n' = l$.

Дискриминант формы f равен $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Дискриминант формы $f + l^2$ равен $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} (\alpha_n + 1)$. Он больше дискриминанта формы f, так как все коэффициенты α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ положительны.

532. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= a_{11} x_1^2 + 2a_{21} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{n1} x_1 x_n + \varphi =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} x_n\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n),$$

$$f_1 = \varphi - a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{n1}}{a_{11}} x_n\right)^2.$$

Форма f_1 положительно определена, и ее дискриминант равен $\frac{D_f}{a_{11}}$, где D_f — дискриминант f. На основании результата задачи 531, $D_{f_1} \geqslant \frac{D_f}{a_{11}}$, что и требовалось доказать.

533. Доказывается так же, как закон инерции.

534. Операция (f, φ), очевидно, дистрибутивна. Поэтому достаточно провести доказательство для квадратов линейных форм.

Пусть

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^2, \qquad \varphi = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)^2.$$

Тогда $(f, \varphi) = (\alpha_1\beta_1 x_1 + \alpha_2\beta_2 x_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n x_n)^2 \geqslant 0$.

535. a) $4x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3;$$

b) $2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,$$
$$x_3' = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3;$$

c) $7x_1'^2 + 4x_2'^2 + x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3;$$

d) $10x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3' = \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}x_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

e) $-7x_1'^2 + 2x_2'^2 + 2x_3'^2$,

$$x_1' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2' = \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3' = \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}x_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

f) $2x_1'^2+5x_2'^2+8x_3'^2,\quad x_1'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$

$$x_2'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$

$$x_3'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3;$$

g) $7x_1'^2-2x_2'^2+7x_3'^2,\quad x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$

$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$

$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3;$$

h) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2,\quad x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,$

$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$

$$x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3;$$

i) $x_1'^2-x_2'^2+3x_3'^2+5x_4'^2,\quad x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$

$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

j) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2,\quad x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$

$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$$

$$x_4'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3-\frac{\sqrt{2}}{2}x_4;$$

k) $x_1'^2+x_2'^2+3x_3'^2-x_4'^2,\quad x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$

$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4;$$

l) $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-3x_4'^2$, $\quad x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$

$$x_2'=\qquad\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

m) $x_1'^2-x_2'^2+7x_3'^2-3x_4'^2$, $\quad x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$

$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

n) $5x_1'^2-5x_2'^2+3x_3'^2-3x_4'^2$, $\quad x_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$

$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4.$$

536. a) $\frac{n+1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$;

b) $\frac{n-1}{2}x_1'^2-\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$,

где

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n);$$

$$x_i'=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n,\quad i=2,\ \ldots,\ n,$$

$(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \ldots,\ \alpha_{in})$ — любая ортогональная и нормированная фундаментальная система решений уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0.$$

537. $x_1'^2\cos\frac{\pi}{n+1}+x_2'^2\cos\frac{2\pi}{n+1}+\ldots+x_n'^2\cos\frac{n\pi}{n+1}$.

538. Если все характеристические числа матрицы A лежат на отрезке $[a,\ b]$, то все характеристические числа матрицы $A-\lambda E$

отрицательны при $\lambda > b$ и положительны при $\lambda < a$. Следовательно, квадратичная форма с матрицей $A - \lambda E$ отрицательно определена при $\lambda > b$ и положительно определена при $\lambda < a$. Обратно, если квадратичная форма $X^\top (A - \lambda E) X$ отрицательно определена при $\lambda > b$ и положительно определена при $\lambda < a$, то все характеристические числа матрицы $A - \lambda E$ положительны при $\lambda < a$ и отрицательны при $\lambda > b$.

Следовательно, все характеристические числа матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$.

539. Следует из предыдущей задачи, ибо сумма положительно определенных форм положительно определена, сумма отрицательно определенных форм отрицательно определена.

540. Пусть A — вещественная неособенная матрица; тогда $A^\top A$ есть матрица положительно определенной квадратичной формы, которая может быть приведена к каноническому виду посредством преобразования переменных с треугольной матрицей B, имеющей положительные диагональные элементы. Следовательно, $A^\top A = B^\top B$, откуда $(AB^{-1})^\top AB^{-1} = E$, т. е. $AB^{-1} = P$ ортогональна и $A = PB$. Если $P_1 B_1 = P_2 B_2$, то треугольная матрица $B_2 B_1^{-1}$ с положительной диагональю равна ортогональной матрице $P_2^{-1} P_1$, что возможно только при $B_2 B_1^{-1} = E$.

541. Пусть $A = P^{-1} \Lambda P$, где P — ортогональная матрица, Λ — диагональная с положительными элементами. Тогда $B = P^{-1} \sqrt{\Lambda} P$, где $\sqrt{\Lambda}$ — диагональная матрица, составленная из арифметических значений квадратных корней из элементов Λ.

542. Положим $A^\top A = B^2$, где B — положительно определенная симметричная матрица. Тогда $AB^{-1} = P$ ортогональна и $A = PB$.

543. Пусть $A = LR$, где L — левая, R — правая треугольные матрицы. Поэтому $A = LL^\top (L^\top)^{-1} R = BC$, где $B = LL^\top$ — положительно определенная матрица, $C = (L^\top)^{-1} R$ — правая треугольная.

544. $$B^\top B = (E + A^\top)^{-1} (E - A^\top)(E - A)(E + A)^{-1} = \\ = (E - A)^{-1} (E + A)(E - A)(E + A)^{-1} = \\ = (E - A)^{-1} (E - A)(E + A)(E + A)^{-1} = E.$$

545. а) $4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 - 8 = 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

b) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2+\frac{1}{2}=0,$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix};$$

c) $3y_1^2+4y_2^2+3\sqrt{6}\,y_3=0,$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix};$$

d) $\frac{\sqrt{6}}{4}y_1^2-y_2=0,$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix};$$

e) $y_1^2-y_2^2-y_3^2=0,$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix};$$

f) $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2=0,$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}.$$