ГЛАВА V

546. a) Частное $2x^2+3x+11$, остаток $25x-5$.

b) Частное $\frac{3x-7}{9}$, остаток $\frac{-26x-2}{9}$.

547. $q=m,\ p=-m^2-1$.

548. Если $m=0$, то $q=p-1$; если $m\neq 0$, то $p=2-m^2,\ q=1$.

549. a) $(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5$;

b) $(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)-327$;

c) $(x+1+i)[4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)]+8-6i$;

d) $(x-1+2i)[x^2-2ix-5-2i]-9+8i$.

550. a) 136; b) $-1-44i$.

551. a) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;

b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$;

c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$;

d) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$;

e) $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$.

552. a) $\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{6}{(x-2)^3}+\dfrac{11}{(x-2)^4}+\dfrac{7}{(x-2)^5}$;

b) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{4}{(x+1)^3}+\dfrac{2}{(x+1)^5}$.

553. a) $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$;

b) $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$.

554. a) $f(2)=18,\quad f'(2)=48,\quad f''(2)=124,\quad f'''(2)=216,$ $f^{IV}(2)=240,\ f^{V}(2)=120$;

b) $f(1+2i)=-12-2i,\ f'(1+2i)=-16+8i,\ f''(1+2i)=-8+30i,$ $f'''(1+2i)=24+30i,\ f^{IV}(1+2i)=24$.

555. a) 3; b) 4. **556.** $a=-5$.

557. $A=3,\ B=-4$. **558.** $A=n,\ B=-(n+1)$.

561. Для того чтобы $f(x)$ делилось на $(x-1)^{k+1}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n=0$ и $f'(x)$ делилось на $(x-1)^k$, для чего, в свою очередь, при выполнении условия $f(1)=0$ необходимо и достаточно, чтобы $f_1(x)=nf(x)-xf'(x)$ делилось на $(x-1)^k$. Рассматривая $f_1(x)$ формально как полином n-й степени, повторяем то же рассуждение k раз.

562. a есть корень $(k+3)$-й кратности, где k — показатель кратности a как корня $f'''(x)$.

563. $3125b^2+108a^5=0,\ a\neq 0$.

564. $b=9a^2,\ 1728a^5+c^2=0$.

565. Производная $x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$ не имеет кратных корней, кроме 0.

566. Положив наибольший общий делитель m и n равным d, $m=dm_1,\ n=dn_1$, получим условие в виде

$$(-1)^{n_1}(n_1-m_1)^{n_1-m_1}m_1^{m_1}a^{n_1}=b^{m_1}n_1^{n_1}.$$

568. Если $x_1\neq 0$ — корень $(k-1)$-й кратности полинома $a_1x^{m_1}+\ldots+a_kx^{m_k}$, то числа $a_1x_1^{m_1},\ \ldots,\ a_kx_1^{m_k}$ составляют решение однородной системы

$$\begin{aligned} z_1+z_2+\ldots+z_k&=0,\\ m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_kz_k&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ m_1^{k-2}z_1+m_2^{k-2}z_2+\ldots+m_k^{k-2}z_k&=0 \end{aligned}$$

и, следовательно, пропорциональны числам $\frac{\Delta}{\varphi'(m_1)}, \ldots, \frac{\Delta}{\varphi'(m_k)}$, где Δ — определитель Вандермонда.

569. Если $f(x)$ делится на $f'(x)$, то частное есть полином первой степени со старшим коэффициентом $1/n$, где n — степень $f(x)$. Поэтому $nf(x)=(x-x_0)f'(x)$. В результате дифференцирования получаем $(n-1)f'(x)=(x-x_0)f''(x)$ и т. д., откуда

$$f(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)=a_0(x-x_0)^n.$$

Обратное очевидно.

570. Кратный корень полинома $f(x)=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ должен быть также корнем его производной

$$f'(x)=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}.$$

Следовательно, если $f(x_0)=f'(x_0)=0$, то $x_0=0$, но 0 не является корнем $f(x)$.

571. Если $f(x)=(x-x_0)^k f_1(x)$, где $f_1(x)$ — дробная рациональная функция, не обращающаяся в 0 при $x=x_0$, то непосредственное дифференцирование дает:

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

572. Функция

$$g(x)=\frac{\psi(x)}{w(x)}=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

удовлетворяет условию

$$g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0.$$

Следовательно, $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}F(x)$, где $F(x)$ — полином, что и требовалось доказать.

573. Если $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$ не равно 0 тождественно, то можно считать, что $f_1(x_0)\neq 0$. Рассмотрим дробную рациональную функцию $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}-\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$. Она не равна тождественно нулю и имеет корнем x_0. Кратность этого корня на единицу выше кратности x_0 как корня производной, равной $\frac{f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)}{[f_1(x)]^2}$, откуда справедливость доказываемого утверждения следует непосредственно.

574. Пусть x_0 — корень кратности k для $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$. Тогда $f(x_0) \neq 0$, ибо иначе x_0 было бы общим корнем для $f(x)$ и $f'(x)$. По предыдущей задаче x_0 будет корнем кратности $k+1$ для полинома $f(x)f'(x_0) - f(x_0)f'(x)$, степень которого не превосходит n. Следовательно, $k+1 \leqslant n$, $k \leqslant n-1$.

575. Полином $f(x)f'(x_0) - f(x_0)f'(x)$ должен иметь x_0 корнем n-й кратности, т. е. должен равняться $A(x-x_0)^n$, где A — постоянная. Разложение по степеням $x - x_0$ после замены $x - x_0 = z$ дает

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n)\,a_1 - \\ -(a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1})\,a_0 = Az^n,$$

причем

$$a_0 = f(x_0) \neq 0.$$

Отсюда $a_2 = \dfrac{a_1^2}{2a_0}$, $a_3 = \dfrac{a_1^3}{a_0^2 3!}$, $\ldots$, $a_n = \dfrac{a_1^n}{a_0^{n-1} n!}$. Заменив $\dfrac{a_1}{a_0} = \alpha$, получим

$$f(x) = a_0\left[1 + \frac{\alpha(x-x_0)}{1} + \frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\alpha^n(x-x_0)^n}{n!}\right].$$

576. Так как $u(x, y) = \dfrac{1}{2}(f(x+yi) + \bar{f}(x-yi))$ и $v(x, y) = \dfrac{1}{2i}(f(x+yi) - \bar{f}(x-yi))$, заключаем, что система $u = 0$, $v = 0$ равносильна системе $f(x+yi) = 0$, $\bar{f}(x-yi) = 0$, откуда $x + yi = z_k$, $x - yi = \bar{z}_m$ и $x = \dfrac{z_k + \bar{z}_m}{2}$, $y = \dfrac{z_k - \bar{z}_m}{2i}$. Здесь z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — корни полинома $f(z)$, индексы k и m меняются независимо от 1 до n;

577. a) $x+1$; b) x^2+1; c) x^3+1; d) x^2-2x+2; e) x^3-x+1; f) $x+3$; g) x^2+x+1; h) $x^2-2x\sqrt{2}-1$; i) $x+2$; j) 1; k) $2x^2+x-1$; l) x^2+x+1.

578. a) $(-x-1)f_1(x) + (x+2)f_2(x) = x^2-2$;

b) $-f_1(x) + (x+1)f_2(x) = x^3+1$;

c) $(3-x)f_1(x) + (x^2-4x+4)f_2(x) = x^2+5$;

d) $(1-x^2)f_1(x) + (x^3+2x^2-x-1)f_2(x) = x^3+2$;

e) $(-x^2+x+1)f_1(x) + (x^3+2x^2-5x-4)f_2(x) = 3x+2$;

f) $-\dfrac{x-1}{3}f_1(x) + \dfrac{2x^2-2x-3}{3}f_2(x) = x-1$.

579. a) $M_2(x) = x$, $\quad M_1(x) = -3x^2-x+1$;

b) $M_2(x) = -x-1$, $\quad M_1(x) = x^3+x^2-3x-2$;

c) $M_2(x) = \dfrac{-x^2+3}{2}$, $\quad M_1(x) = \dfrac{x^4-2x^2-2}{2}$;

d) $M_2(x) = -\dfrac{2x^2+3x}{6}$, $\quad M_1(x) = \dfrac{2x^3+5x^2-6}{6}$;

e) $M_2(x) = 3x^2+x-1$, $\quad M_1(x) = -3x^3+2x^2+x-2$;

f) $M_2(x) = -x^3 - 3x^2 - 4x - 2,$

$$M_1(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 7.$$

580. a) $M_2(x) = \dfrac{-16x^2 + 37x + 26}{3}$, $M_1(x) = \dfrac{16x^3 - 53x^2 - 37x - 23}{3}$;

b) $M_2(x) = 4 - 3x$, $M_1(x) = 1 + 2x + 3x^2$;

c) $M_2(x) = 35 - 84x + 70x^2 - 20x^3$, $M_1(x) = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3$.

581. 1.

582. a) $M_1(x) = 9x^2 - 26x - 21$, $M_2(x) = -9x^3 + 44x^2 - 39x - 7$;

b) $M_1(x) = 3x^3 + 3x^2 - 7x + 2$, $M_2(x) = -3x^3 - 6x^2 + x + 2$.

583. a) $4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24$;

b) $-5x^7 + 13x^6 + 27x^5 - 130x^4 + 75x^3 + 266x^2 - 440x + 197$.

584. $N(x) = 1 + \dfrac{n}{1}x + \dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}x^{m-1};$$

$$M(x) = 1 + \frac{m}{1}(1-x) + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}(1-x)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(1-x)^{n-1} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!} - \frac{m}{1}\,\frac{(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-2)!}x +$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\,\frac{(m+3)\ldots(m+n-1)}{(n-3)!}x^2 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

585. a) $(x+1)^4(x-2)^2$; b) $(x+1)^4(x-4)$;

c) $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$; d) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$;

e) $(x^3-x^2-x-2)^2$; f) $(x^2+1)^2(x-1)^3$;

g) $(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2$.

586. a) $d = x^2 + x + 1 = (x+1)f + x^2 g$;

b) $d = x + 1 = xf + (x^2+1)g$;

c) $d = 1 = (x+1)f + x^2 g$;

d) $d = 1 = (x^3+x)f + (x^4+x+1)g$.

587. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$;

c) $\left(x+1-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$

$$\times\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$

$$\times\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$

$$\times\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

d) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})\times$
$\times(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

588. a) $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$;

b) $2\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{\sin\left(\theta+\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$; c) $\prod_{k=1}^{m}\left(x-\operatorname{tg}^2\frac{(2k-1)\pi}{4m}\right)$.

589. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)=$
$=x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$;

b) $(x+1)^3(x-3)(x-4)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;

c) $(x-i)^2(x+1+i)=x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-1-i$.

590. a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;

b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\times$
$\times\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$;

d) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\sqrt[2n]{2}\,x\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n}+\sqrt[n]{2}\right)$;

e) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$;

f) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1\right)$.

591. $\prod_{k=1}^{n}X_k(x)$.

592. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=x^6-9x^5+33x^4-65x^3+$
$+74x^2-46x+12$;

b) $(x^2-4x+13)^3=x^6-12x^5+87x^4-376x^3+1131x^2-$
$-2028x+2197$;

c) $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$.

593. a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)^3$.

594. x^d-1, где d — наибольший общий делитель m и n.

595. x^d+a^d, если числа $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$ — нечетные; 1, если хотя бы одно из них четное; d обозначает наибольший общий делитель m и n.

596. 1) $F_{n,m}(x)=x^mF_{n-1,m}(x)+F_{n-1,m-1}(x)$. Отсюда заключаем, по индукции, что $F_{n,m}(x)$ есть полином с неотрицательными коэффициентами.

2) Пусть ε — некоторый корень числителя, он есть корень из единицы показателя $k\leqslant n$. Его кратность для числителя равна

$\left[\frac{n}{k}\right]$, а для знаменателя $\left[\frac{m}{k}\right]+\left[\frac{n-m}{k}\right]$. Кратность для $F_{n,m}(x)$ равна $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{n-m}{k}\right]=0$ или 1.

597. a) $(x-1)^2(x+1)$; b) $(x-1)^3(x+1)$; c) x^d-1, где $d=(m, n)$.

598. Обозначим $\lambda_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ и разложим $f(x)$ на линейные множители: $f(x)=(x-\lambda_0)(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_{k-1})$. Тогда $\lambda_j\neq\lambda_0$ при $j\neq 0$. Далее,

$$f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{1}{[v(x)]^k}(u(x)-\lambda_0 v(x))\ldots(u(x)-\lambda_{k-1}v(x)).$$

В силу условия задачи и того, что $u(x_0)-\lambda_j v(x_0)=v(x_0)(\lambda_0-\lambda_j)\neq 0$, полином $u(x)-\lambda_0 v(x)$ имеет x_0 корнем кратности $k>1$. Следовательно, $u'(x)-\lambda_0 v'(x)$ имеет x_0 корнем кратности $k-1$. Далее,

$$f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)=\frac{1}{[v'(x)]^k}(u'(x)-\lambda_0 v'(x))\ldots(u'(x)-\lambda_{k-1}v'(x)).$$

Все $u'(x)-\lambda_j v'(x)$, $j\neq 0$, очевидно, не обращаются в 0 при $x=x_0$. Следовательно, $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)$ имеет x_0 корнем кратности $k-1$, что и требовалось доказать.

599. Если w — корень полинома x^2+x+1, то $w^3=1$. Следовательно, $w^{3m}+w^{3n+1}+w^{3p+2}=1+w+w^2=0$.

600. Корень λ полинома x^2-x+1 удовлетворяет уравнению $\lambda^3=-1$. Следовательно,

$$\lambda^{3m}-\lambda^{3n+1}+\lambda^{3p+2}=(-1)^m-(-1)^n\lambda+(-1)^p\lambda^2=$$
$$=(-1)^m-(-1)^p+\lambda[(-1)^p-(-1)^n].$$

Последнее выражение может равняться нулю только в случае $(-1)^m=(-1)^p=(-1)^n$, т. е. если m, n, p — одновременно четные или одновременно нечетные числа.

601. $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Множители эти взаимно просты, x^2+x+1 всегда является делителем $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ (задача 599). Остается выяснить, когда имеет место делимость на x^2-x+1. Подстановка корня λ этого полинома дает

$$(-1)^m+(-1)^n\lambda+(-1)^p\lambda^2=(-1)^m-(-1)^p+\lambda[(-1)^n+(-1)^p].$$

В результате получится 0 только в случае $(-1)^m=(-1)^p=-(-1)^n$, т. е. числа m, p и $n+1$ — одновременно четные или нечетные.

602. Если m не делится на 3.

603. Делимость $f(x)$ на x^2+x+1 имеет место при $m=6n+1$ и $m=6n+5$.

604. При $m=6n+2$ и $m=6n+4$.

605. При $m=6k+1$. **606.** При $m=6k+4$.

607. Нет, так как первая и вторая производные не обращаются в 0 одновременно.

608. При m, взаимно простых с n.

609. Если $f(x^n)$ делится на $x-1$, то $f(1)=0$ и, следовательно, $f(x)$ делится на $x-1$, откуда следует, что $f(x^n)$ делится на x^n-1.

610. Если $F(x)=f(x^n)$ делится на $(x-a)^k$, то $F'(x)=f'(x^n)nx^{n-1}$ делится на $(x-a)^{k-1}$, откуда следует, что $f'(x^n)$ делится на $(x-a)^{k-1}$. Таким же образом, $f''(x^n)$ делится на $(x-a)^{k-2}, \ldots, f^{(k-1)}(x^n)$ делится на $x-a$. Отсюда заключаем, что $f(a^n)=f'(a^n)=\ldots$ $\ldots=f^{(k-1)}(a^n)=0$ и, следовательно, $f(x)$ делится на $(x-a^n)^k$, $f(x^n)$ делится на $(x^n-a^n)^k$.

611. Если $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ делится на x^2+x+1, то $F(w)=$ $=f_1(1)+wf_2(1)=0$ (w — корень x^2+x+1) и $F(w^2)=f_1(1)+w^2f_2(1)=0$, откуда $f_1(1)=0$, $f_2(1)=0$.

612. Полином $f(x)$ не имеет вещественных корней нечетной кратности, так как иначе он менял бы знак. Следовательно, $f(x)=$ $=[f_1(x)]^2f_2(x)$, где $f_2(x)$ — полином, не имеющий вещественных корней. Комплексные корни полинома f_2 разделим на две группы, относя комплексно сопряженные в разные группы. Произведения линейных множителей, соответствующих корням каждой группы, образуют полиномы с сопряженными коэффициентами $\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ и $\psi_1(x)-i\psi_2(x)$. Следовательно,

$$f_2(x)=\psi_1^2(x)+\psi_2^2(x) \quad \text{и} \quad f(x)=(f_1\psi_1)^2+(f_1\psi_2)^2.$$

613. a) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$;

c) $x_1-a, x_2-a, \ldots, x_n-a$; d) $bx_1, bx_2, \ldots bx_n$.

614. $\lambda=\pm 6$. **615.** $\lambda=-3$. **616.** $q^3+pq+q=0$. **617.** $a_1^2-2a_2$.

618. $x_i=-\frac{a_1}{n}+\frac{2i-n-1}{2}h$, $i=1, 2, \ldots, n$, где,

$$h=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(n-1)a_1^2-24na_2}{n^2-1}}.$$

619. Пусть $y=Ax+B$ — уравнение искомой прямой. Тогда корни уравнения $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=Ax+B$ образуют арифметическую прогрессию. Находим их, согласно задаче 618:

$$x_i=-\frac{a}{4}+\frac{2i-5}{2}h, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

где

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a^2-24b}{15}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-8b}{5}}.$$

Отсюда

$$A-c=x_1x_4(x_2+x_3)+x_2x_3(x_1+x_4)=$$
$$=-\left(\frac{a^2}{16}-\frac{9}{4}h^2\right)\frac{a}{2}-\left(\frac{a^2}{16}-\frac{1}{4}h^2\right)\frac{a}{2}=\frac{a^3-4ab}{8},$$

$$d-B=x_1x_2x_3x_4=\frac{1}{1600}(36b-11a^2)(4b+a^2).$$

Следовательно,

$$A=\frac{a^3-4ab+8c}{8}, \quad B=d-\frac{1}{1600}(36b-11a^2)(4b+a^2).$$

Точки пересечения будут вещественными и не сливающимися, если $3a^2-8b>0$, т. е. если вторая производная $2(6x^2+3ax+b)$ меняет знак при изменении x вдоль вещественной оси.

620. $x^4-ax^2+1=0$, где $a=\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$.

621. $(x^2-x+1)^3-a(x^2-x)^2=0, \quad a=\frac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{(\alpha^2-\alpha)^2}$.

622. $x^p-x=x(x-1)\dots(x-(p-1))$.

623. $(p-1)!\equiv-1 \pmod p$ (см. задачу 53).

624. a) $\frac{1}{12(x-1)}-\frac{4}{3(x+2)}+\frac{9}{4(x+3)}$;

b) $-\frac{1}{6(x-1)}+\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{6(x-4)}$;

c) $\frac{2}{x-1}+\frac{-2+i}{2(x-i)}+\frac{-2-i}{2(x+i)}$;

d) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{i}{4(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)}$;

e) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right), \quad \varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

f) $-\frac{1}{16}\left(\frac{1+i}{x-1-i}+\frac{1-i}{x-1+i}+\frac{-1+i}{x+1-i}+\frac{-1-i}{x+1+i}\right)$;

g) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

h) $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{x-\eta_k}, \quad \eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$;

i) $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; j) $\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^{n-k}C_{2n}^{n+k}}{x-k}$;

k) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$.

625. a) $\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}$;

b) $\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$;

c) $\frac{3}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$;

d) $\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2}-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}\right],$

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};$$

e) $$\frac{1}{x^m}+\frac{\frac{n}{1}}{x^{m-1}}+\frac{\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}}{x^{m-2}}+\ldots+\frac{\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}}{x}+$$
$$+\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{\frac{m}{1}}{(1-x)^{n-1}}+\frac{\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}}{(1-x)^{n-2}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}}{1-x};$$

f) $$\frac{1}{(-4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{(a-x)^{n-k}}+\frac{1}{(a+x)^{n-k}}\right];$$

g) $$\frac{1}{(4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{(a-ix)^{n-k}}+\frac{1}{(a+ix)^{n-k}}\right];$$

h) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{[f'(x_k)]^2(x-x_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{g'(x_k)f'(x_k)-g(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^3(x-x_k)}.$$

626. a) $\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)};$

b) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)};$

c) $\frac{1}{8}\,\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{8}\,\frac{x-2}{x^2-2x+2};$

d) $\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3}\right);$

e) $$\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}-\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right];$$

f) $$\frac{(-1)^m}{2n+1}\left[\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right];$$

g) $\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x\cos\frac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}\right]$;

h) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(2k-1)\,m\pi}{n}-x\cos\frac{(2k-1)(2m+1)\,\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}+1}$;

i) $\frac{1}{(n!)^2\,x}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\,x}{(n+k)!\,(n-k)!\,(x^2+k^2)}$.

627. a) $-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}$;

b) $-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+$

$$+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2};$$

d) $\frac{1}{4n^2}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2n-1}{x-1}+\frac{2n-1}{x+1}\right]+$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{n}\left(1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-\sin^2\frac{k\pi}{n}-\left(n-\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}.$$

628. a) $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; b) $\frac{x\varphi'(x)-n\varphi(x)}{\varphi(x)}$; c) $\frac{[\varphi'(x)]^2-\varphi(x)\,\varphi''(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

629. a) 9; b) $-\frac{\varphi'(2)}{\varphi(2)}+\frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}=-\frac{17}{5}$; c) 17.

630. $-\sum_{a=0}^{p-1}\frac{1}{x-a}$.

631. a) $f(x)=x+1+\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $f(x)=-x^4+4x^3-x^2-7x+5$;

c) $f(x)=1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{1}{105}(x-1)(4x-9)+$

$$+\frac{1}{945}(x-1)(4x-9)(x-4),$$

$f(2)=1\frac{389}{945}=1{,}4116\ \ldots\ (\sqrt{2}=1{,}4142\ \ldots)$;

d) $f(x)=x^3-9x^2+21x-8$.

632. a) $y=-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+$

$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-2(x-1)(x-2)(x-4)+$$

$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)=-\frac{4}{3}x^3+10x^2-\frac{65}{3}x+15;$$

b) $y=\frac{1}{2}[5-(1-i)x-x^2-(1+i)x^3]$.

633. $f(x)=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k$.

634. $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(x^n-1)}{(x-\varepsilon_k)n\varepsilon_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(1-x^n)}{1-x\varepsilon_k^{-1}}$,

$$f(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k.$$

635. Положим $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Пусть $f(x)$ — произвольный полином не выше $(n-1)$-й степени, $y_1, y_2, \dots y_n$ — его значения при $x=x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$f(x_0)=\frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\varphi(x_0)}{\varphi'(x_i)(x_0-x_i)}.$$

В силу произвольности $y_1, y_2, \dots, y_n$,

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_k)(x_0-x_k)}=\frac{1}{n}.$$

Рассмотрим полином

$$F(x)=n[\varphi(x_0)-\varphi(x)]-(x_0-x)\varphi'(x).$$

Степень его меньше n, и он обращается в 0 при $x=x_1, x_2, \dots, x_n$. Следовательно, $F(x)=0$. Разложим $\varphi(x)$ по степеням $(x-x_0)$:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k.$$

Имеем $\sum_{k=1}^{n}(n-k)c_k(x-x_0)^k=0$. Следовательно, $c_1=c_2=\dots=c_{n-1}=0$;

$$\varphi(x)=(x-x_0)^n+c_0,\quad x_i=x_0+\sqrt[n]{-c_0}.$$

636. $x^s=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. Сравнение коэффициентов при x^{n-1} дает

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0.$$

637. $x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. Сравнение коэффициентов при x^{n-1} дает

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}=1.$$

638. $a_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta_{ki}$, где $\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, Δ_{ki} — алгебраическое дополнение элемента k-й строки и $(i+1)$-го столбца определителя Δ.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{ki}x^i=\sum_{k=1}^{n}y_k\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где Δ_k — определитель, получающийся из Δ заменой элементов k-й строки на $1, x, \dots, x^{n-1}$.

Вычисление определителей Δ_k и Δ как определителей Вандермонда дает

$$\frac{\Delta_k}{\Delta}=\frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}=\frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)},$$

где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Отсюда $f(x)=\sum\frac{y_k\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$, что и требовалось доказать.

639. $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.

640. $$f(x)=1+\frac{(a-1)x}{1}+\frac{(a-1)^2x(x-1)}{1\cdot 2}+\dots$$
$$\dots+\frac{(a-1)^nx(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}.$$

641. $$f(x)=1-\frac{2x}{1}+\frac{2x(2x-2)}{1\cdot 2}+\dots$$
$$\dots+\frac{2x(2x-2)\dots(2x-4n+2)}{(2n)!}.$$

642. $$f(x)=1-\frac{x-1}{2!}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}-\dots$$
$$\dots+(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=\frac{n!-(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!\,x}.$$

643. $f(x)=x^{p-2}$.

644. $f(x)=\dfrac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\varphi(a)(x-a)}$, где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

645. Ищем $f(x)$ в виде

$$f(x)=A_0+A_1\frac{x-m}{1}+A_2\frac{(x-m)(x-m-1)}{1\cdot 2}+\dots$$
$$\dots+A_n\frac{(x-m)(x-m-1)\dots(x-m-n+1)}{n!},$$

где m, $m+1$, $\dots$, $m+n$ — целые значения x, при которых по условию $f(x)$ принимает целые значения.

Полагая последовательно $x=m$, $m+1$, $\dots$, $m+n$, получим равенства для определения A_0, A_1, $\dots$, A_n:

$$A_0=f(m),$$
$$A_k=f(m+k)-A_0-\frac{k}{1}A_1-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}A_2-\dots-kA_{k-1},$$
$$k=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

из которых следует, что все коэффициенты A_k — целые. При целых значениях x все слагаемые $f(x)$ обращаются в биномиальные коэффициенты с целыми множителями A_k и потому являются целыми числами. Следовательно, $f(x)$ принимает целые значения при целых значениях x, что и требовалось доказать.

646. Полином $F(x)=f(x^2)$ степени $2n$ принимает целые значения при $2n+1$ значениях $x=-n$, $-(n-1)$, $\dots$, -1, 0, 1, $\dots$, n и в силу предыдущей задачи принимает целые значения при всех целых значениях x.

647. $0{,}51x+2{,}04$. **648.** $y=\frac{1}{7}[0{,}55x^2+2{,}35x+6{,}98]$.

649. Подставив $\frac{p}{q}$ в $f(x)$, получим после умножения на q^n

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0,$$

откуда a_0p^n делится на q, a_nq^n делится на p. Числа p и q взаимно просты. Следовательно, a_0 делится на q, a_n делится на p.

Расположим теперь $f(x)$ по степеням $x-m$:

$$f(x)=a_0(x-m)^n+c_1(x-m)^{n-1}+\dots+c_{n-1}(x-m)+c_n.$$

Коэффициенты c_1, $\dots$, c_n — целые числа, так как m — целое; $c_n=f(m)$. Подставив $x=\frac{p}{q}$, получим

$$a_0(p-mq)^n+c_1(p-mq)^{n-1}q+\dots+c_{n-1}(p-mq)q^{n-1}+c_nq^n=0,$$

откуда заключаем, что c_nq^n делится на $p-mq$, следовательно, $c_n=f(m)$ делится на $p-mq$, ибо q и $p-mq$ взаимно просты.

650. Для примера а) даем подробное решение.

Возможные значения для p: 1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14. Для q только 1 (знак считаем присоединенным к числителю).

$f(1)=-4$. Следовательно, $p-1$ должно быть делителем 4, Отбрасываются возможности $p=1, -2, 7, -7, 14, -14$. Остается испытать -1 и 2.

$f(-1)\neq 0$; $f(2)=0$. Единственный рациональный корень $x_1=2$.

b) $x_1=-3$; c) $x_1=-2$, $x_2=3$; d) $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$; f) 1, -2, 3; g) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;

h) рациональных корней нет; i) -1, -2, -3, $+4$;

j) $\frac{1}{2}$; k) $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$; l) $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=-3$;

m) $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=x_5=-1$; n) $x_1=x_2=x_3=2$.

651. По задаче 649 p и $p-q$ — одновременно нечетные числа. Следовательно, q — четное число и не может равняться единице.

652. По задаче 649 $p-x_1q=\pm 1$, $p-x_2q=\pm 1$, откуда $(x_2-x_1)q=\pm 2$ или 0. Значение 0 отпадает, так как $q>0$, $x_2\neq x_1$. Положив для определенности $x_2>x_1$, получим $(x_2-x_1)q=2$. Это равенство невозможно при $x_2-x_1>2$. Положим теперь, что $x_2-x_1=1$ или 2. Единственно возможные значения для p и q, при которых возможно равенство $(x_2-x_1)q=2$, есть $p=x_1q+1$, $q=\frac{2}{x_2-x_1}$, откуда единственная возможность для рационального корня $\frac{p}{q}=x_1+\frac{1}{q}=\frac{x_1+x_2}{2}$, что и требовалось доказать

653. Выполнен признак Эйзенштейна:

a) для $p=2$; b) для $p=3$; c) для $p=3$, после разложения полинома по степеням $x-1$.

654.
$$X_p(x)=(x-1)^{p-1}+\frac{p}{1}(x-1)^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(x-1)^{p-3}+\ldots+p.$$

Все коэффициенты $C_k=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$, $k\leqslant p-1$, делятся на p, ибо $k!\,C_k=p(p-1)\ldots(p-k+1)$ делится на p, а $k!$ взаимно просто с p. Таким образом, для $X_p(x)$ после разложения по степеням $x-1$ выполнен признак Эйзенштейна для простого числа p.

655. По индукции, $(y+1)^{p^m}-1\equiv y^{p^m} \pmod p$, откуда $y^{p^m}\equiv y^{p^{m-1}}X_{p^m}(y+1) \pmod p$ и $X_{p^m}(y+1)\equiv y^{p^m-p^{m-1}} \pmod p$, т. е. все коэффициенты, кроме старшего, делятся на p. Свободный член равен $X_{p^m}(1)=p$.

656. Допустим, что полином приводим: $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$. Тогда оба множителя имеют целые коэффициенты и степени их больше 1, так как $f(x)$ по условию не имеет рациональных корней. Пусть

$$\varphi(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k,$$
$$\psi(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_m,$$

$k\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, $k+m=n$. Так как $b_kc_m=a_n$ делится на p и не делится на p^2, можно принять, что b_k делится на p, c_m не делится на p.

Пусть b_i — первый с конца коэффициент $\varphi(x)$, не делящийся на p, $i\geqslant 0$. Такой найдется, так как $a_0=b_0c_0$ не делится на p. Тогда $a_{m+i}=b_ic_m+b_{i+1}c_{m-1}+\ldots$ не делится на p, так как b_ic_m не делится на p, а b_{i+1}, b_{i+2}, $\ldots$ делятся на p. Это противоречит условию, ибо $m+i\geqslant 2$.

657. Разложив $f(x)$ на неприводимые множители с целыми коэффициентами, рассмотрим неприводимый множитель $\varphi(x)$, свободный член которого делится на p. Такой найдется, так как a_n делится на p. Частное от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ обозначим $\psi(x)$. Пусть

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m,$$
$$\psi(x)=c_0x^h+c_1x^{h-1}+\ldots+c_h$$

и b_i — первый с конца коэффициент $\varphi(x)$, не делящийся на p; c_h не делится на p, так как $a_n=b_mc_h$ не делится на p^2.

Поэтому $a_{h+i}=b_ic_h+b_{i+1}c_{h-1}+\ldots$ не делится на p, откуда следует $h+i\leqslant k$. Следовательно, $m\geqslant m+h+i-k=n+i-k\geqslant n-k$.

658. x, $x+1$, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$, x^5+x^2+1, x^5+x^3+1, $x^5+x^3+x^2+x+1$, $x^5+x^4+x^2+x+1$, $x^5+x^4+x^3+x+1$, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$.

659. x, $x+1$, $x-1$, x^2+1, x^2+x-1, x^2-x-1, x^3-x+1, x^3+x^2-x+1, x^3-x^2+1, x^3-x^2+x+1, x^3-x-1, x^3-x^2-x-1, x^3+x^2-1, x^3+x^2+x-1.

661. $x^5-6x^3+2x^2-4x+5\equiv(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \pmod 2$,
$x^5-6x^3+2x^2-4x+5\equiv(x^2+1)(x^3-x-1) \pmod 3$.

Сомножители неприводимы по соответствующим модулям, их степени различны.

662. $x^{p-1}-1=\prod\limits_{d\mid p-1}X_d(x)\equiv(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) \pmod p$.

В силу однозначности разложения на неприводимые множители, все полиномы $X_d(x)$ при $d\mid p-1$, разлагаются на линейные множители.

663. Первообразным корнем будет любой корень полинома $X_{p-1}(x)$.

664. Если $f(x+a)=f(x+b)$, то $f(x)=f(x+c)=f(x+2c)=\ldots$ $\ldots=f(x+(p-1)c)$, где $c=b-a$. Если $b\not\equiv a \pmod p$, то 0, c,

$2c, \ldots, (p-1)c$ составляют все элементы поля вычетов, так что $f(x)=f(x+1)=\ldots=f(x+p-1)$.

665. Пусть $\varphi(x)$ — неприводимый множитель $f(x)$. Его степень больше 1. Полиномы $\varphi(x)$, $\varphi(x+1)$, $\ldots$, $\varphi(x+p-1)$ все неприводимы и делят $f(x)$. Они не могут быть попарно различны, так как $f(x)$ не может делиться на их произведение, степень которого $\geqslant 2p$. Следовательно, $\varphi(x)=\varphi(x+1)=\ldots=\varphi(x+p-1)$. Поэтому $\varphi(x)-\varphi(0)=0$ при $x=0, 1, \ldots, p-1$, так что степень $\varphi(x)$ не меньше p и $f(x)=\varphi(x)$.

666. a) $f(0)=1$, $f(1)=-1$, $f(-1)=-1$.

Если $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и степень $\varphi(x)\leqslant 2$, то $\varphi(0)=\pm 1$, $\varphi(1)=\pm 1$, $\varphi(-1)=\pm 1$, т. е. $\varphi(x)$ задается одной из таблиц:

x	$\varphi(x)$							
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
0	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

Последние 5 таблиц можно выбросить из рассмотрения, так как последние 4 определяют полиномы, отличающиеся только знаком от полиномов, заданных первыми четырьмя таблицами, четвертая же определяет полином, тождественно равный единице. Первые три дают следующие возможности:

$$\varphi(x)=-(x^2+x-1); \quad \varphi(x)=x^2-x-1; \quad \varphi(x)=2x^2-1.$$

Испытания посредством деления дают:

$$f(x)=(x^2+x-1)(x^2-x-1).$$

b) Неприводим; c) неприводим; d) $(x^2-x-1)(x^2-2)$.

667. Полином $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, не имеющий рациональных корней, может быть разложен, в случае приводимости, только на множители второй степени с целыми коэффициентами:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+\lambda x+m)(x^2+\mu x+n).$$

Число m, очевидно, должно быть делителем d; $mn=d$. Сравнение коэффициентов при x^3 и x дает $\lambda+\mu=a$, $n\lambda+m\mu=c$.

Если $m\neq n$, то $\lambda=\dfrac{c-am}{n-m}=\dfrac{cm-am^2}{d-m^2}$, что и требовалось доказать.

Если же $m=n$, то $d=m^2$, $c=am$. В этом случае λ и μ определяются из системы $\lambda+\mu=a$, $\lambda\mu+2m=b$.

668. В случае приводимости необходимо, чтобы

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x^2+\lambda x+m)(x^3+\lambda' x^2+\lambda'' x+n).$$

Коэффициенты множителей должны быть целыми, Сравнение коэффициентов даёт $mn=e$, откуда следует, что m есть делитель e. Далее,

$$\begin{aligned} \lambda+\lambda'&=a,\\ n\lambda+m\lambda''&=d,\\ m+\lambda\lambda'+\lambda''&=b,\\ n+\lambda\lambda''+m\lambda'&=c, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} m\lambda''-n\lambda'&=d-an,\\ \lambda(m\lambda''-n\lambda')+m^2\lambda'-n\lambda''&=cm-bn \end{aligned}$$

и, следовательно, $(d-an)\lambda+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn$. Решая это уравнение совместно с $\lambda+\lambda'=a$, $n\lambda+m\lambda''=d$, получим

$$\lambda=\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm},$$

что и требовалось доказать

669. a) $(x^2-2x+3)(x^2-x-3)$; b) неприводим;

c) $(x^2-x-4)(x^2+5x+3)$; d) $(x^2-2x+2)(x^3+3x+3)$.

670. 1) $x^5+mx^3-mx+1=$
$$=(x+1)(x^4-x^3+(m+1)x^2-(m+1)x+1);$$

2) $x^5+mx^3-(m+2)x+1=$
$$=(x-1)(x^4+x^3+(m+1)x^2+(m+1)x-1);$$

3) $x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$;

4) $x^5-2x^3-x+1=(x^2+x-1)(x^3-x^2-1)$;

5) $x^5+2x^3+x+1=(x^2-x+1)(x^3+x^2+2x+1)$;

6) $x^5-4x^3+3x+1=(x^2-x-1)(x^3+x^2-2x-1)$.

671. Для приводимости полинома x^4+px^2+q необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

a) p^2-4q есть квадрат рационального числа;

b) q есть квадрат рационального числа μ, $2\mu-p$ есть квадрат рационального числа λ.

672. Если $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$, то, так как $p_1+p_2=a$, можно записать:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-p_2}{2}x+\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2,$$

где $\lambda=q_1+q_2$. Отсюда следует, что вспомогательное кубическое уравнение имеет рациональный корень $\lambda=q_1+q_2$.

673. Пусть $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют целые коэффициенты. Так как $f(a_i)=-1$, то должно быть $\varphi(a_i)=1$, $\psi(a_i)=-1$ или $\varphi(a_i)=-1$, $\psi(a_i)=1$ и, следовательно,

$$\varphi(a_i)+\psi(a_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ оба непостоянные, то степень $\varphi(x)+\psi(x)$ меньше n, откуда следует, что $\varphi(x)+\psi(x)=0$ тождественно. Итак, должно быть $f(x) = -[\varphi(x)]^2$. Это невозможно, так как старший коэффициент $f(x)$ положителен.

674. Если $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, то $\varphi(a_i) = \psi(a_i) = \pm 1$, так как $f(a_i) = 1$. Следовательно, если φ и ψ непостоянные, $\varphi(x) = \psi(x)$ тождественно и

$$f(x) = [\varphi(x)]^2.$$

Это возможно только при четном n.

Итак, единственное возможное разложение есть

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1 = [\varphi(x)]^2.$$

Отсюда выводим, считая старший коэффициент $\varphi(x)$ положительным, что

$$\varphi(x)+1 = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}).$$
$$\varphi(x)-1 = (x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_n).$$

(Для того чтобы иметь право записать эти равенства, нужно изменить нумерацию чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.) И, наконец,

$$(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})-(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_n)=2.$$

Положим $a_1 > a_3 > \ldots > a_{n-1}$. Подставив в последнее равенство $x = a_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, получим

$$(a_{2k}-a_1)(a_{2k}-a_3)\ldots(a_{2k}-a_{n-1}) = 2,$$

т. е. число 2 должно раскладываться на $\frac{n}{2}$ целых множителей, расположенных в порядке возрастания, $\frac{n}{2}$ способами. Это возможно только при $\frac{n}{2} = 2$, $2 = -2\cdot(-1) = 1\cdot 2$, и при $\frac{n}{2} = 1$. Эти две возможности и приводят к двум случаям приводимости полинома $f(x)$, упомянутым в условии задачи.

675. Если полином n-й степени $f(x)$ при $n = 2m$ или $n = 2m+1$ приводим, то степень одного из его множителей $\varphi(x)$ не превосходит m. Если $f(x)$ принимает значения ± 1 более чем при $2m$ целых значениях переменной, то $\varphi(x)$ тоже принимает значения ± 1 при тех же значениях переменной. Среди этих значений для $\varphi(x)$ найдется более чем m равных $+1$ или -1. Но в таком случае $\varphi(x) = +1$ или -1 тождественно.

676. Полином $f(x)$ не имеет вещественных корней. Следовательно, если он приводим, его множители $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют вещественных корней и потому не меняют знака при вещественных значениях x. Можно считать, что $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$ при всех вещественных значениях x. Так как $f(a_k) = 1$, то $\varphi(a_k) = \psi(a_k) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Если степень $\varphi(x)$ [или $\psi(x)$] меньше n, то $\varphi(x) = 1$ [или $\psi(x) = 1$] тождественно. Следовательно, степени $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны n. Тогда

$\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, $\psi(x)=1+\beta(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, где α и β — некоторые целые числа. Но тогда

$$f(x)=(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2+1=$$
$$=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)\ldots(x-a_n)+\alpha\beta(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2.$$

Сравнение коэффициентов при x^{2n} и при x^n дает систему уравнений $\alpha\beta=1$, $\alpha+\beta=0$, не имеющую целых решений. Следовательно, $f(x)$ неприводим.

677. Пусть $f(x)$ принимает значение 1 более трех раз. Тогда $f(x)-1$ имеет по крайней мере четыре целых корня, т. е.

$$f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x),$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 и коэффициенты полинома $h(x)$ суть целые числа. При целых значениях x выражение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$ является произведением различных между собой целых чисел. Два из них могут равняться $+1$ и -1, остальные два отличны от ± 1. Следовательно, их произведение не может равняться простому числу, в частности -2. Итак, $f(x)-1\neq -2$ при целых значениях x и, следовательно, $f(x)\neq -1$.

678. Пусть $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$. Один из множителей $\varphi(x)$ имеет степень $\leqslant\frac{n}{2}$ и принимает значения ± 1 более чем при $\frac{n}{2}$ целых значениях x. Так как $\frac{n}{2}\geqslant 6$, то $+\varphi(x)$ или $-\varphi(x)$ принимает значение 1 более трех раз и, в силу результата задачи 677, не может принимать значения -1. Итак, $\varphi(x)$ или $-\varphi(x)$ принимает значение $+1$ более чем $\frac{n}{2}$ раз и, следовательно, $\varphi(x)$ или $-\varphi(x)$ равно 1 тождественно. Следовательно, $f(x)$ неприводим.

Уточняя рассуждение, можно доказать справедливость результата при $n\geqslant 8$.

679. Пусть

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=\psi(x)\,\omega(x).$$

Один из множителей имеет степень $\leqslant n$; $\psi(x)$ принимает значения ± 1 при $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ и, ввиду того, что $n\geqslant 7$, все эти значения $\psi(x)$ должны быть одного знака. Следовательно,

$$\psi(x)=\pm 1+\alpha(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=\pm 1+\alpha\varphi(x).$$

Если $\alpha\neq 0$, то $\omega(x)$ тоже имеет степень n и $\omega(x)=\pm 1+\beta\varphi(x)$. Но равенство

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=[\pm 1+\alpha\varphi(x)][\pm 1+\beta\varphi(x)]$$

невозможно, так как полином ax^2+bx+1 по условию неприводим.

680. a) $9(x^2+x+1)$;

b) $-\frac{1}{11}(4x^2+8x+9)$; c) $\frac{1}{11}(2x^2+3x-1)$;

d) $1-\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

681. Изоморфизм $\mathbb{Q}[x]/(x^3-3)\longrightarrow\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right)$ задается отображением $x\longrightarrow\sqrt[3]{3}$.

682. $f(x)\longrightarrow(f(1),\ f(2))$.

683. $\lambda_i\lambda_j=a_0\lambda_{i+j}+\ldots+a_j\lambda_i-a_{i+1}\lambda_{j-1}-\ldots-a_{i+j}\lambda_0$, считая $\lambda_k=0$ при $k\geqslant n$ и $a_k=0$ при $k\geqslant n+1$.

684. a) $\frac{\alpha^2-\alpha+1}{3}$; b) $17\alpha^2-3\alpha+55$;

c) $-3\alpha^3+8\alpha^2-10\alpha+3$; d) $\frac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$;

e) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$; f) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;

g) $\frac{1}{34}\left[8+7\sqrt{2}+(6+\sqrt{2})\sqrt[3]{3}+(-4+5\sqrt{2})\sqrt[3]{9}\right]$.

685. a) $x^3-5x^2+4x-1=0$;
b) $x^3-7x^2+3x-1=0$;
c) $x^3-x^2-2x+1=0$

(здесь α и $\lambda=2-\alpha^2$ оказываются корнями одного и того же полинома);

d) $x^4+5x^3+9x^2+7x-6=0$; e) $x^4-12x^3+43x^2-49x+20=0$.

686. a) $x^3-2x^2+6x-4=0$, $\alpha=-\frac{\lambda^2-2\lambda+4}{2}$;

b) $x^4-9x^3+31x^2-45x+13=0$, $\alpha=\frac{\lambda^2-3\lambda+2}{3}$;

c) $(x^2+x-1)^2=0$, α не выражается через λ, т. е. поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(\lambda)$ не совпадают.

687. Пусть $\lambda\in L$, $\lambda\neq 0$, $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{p^m-1}$ — все отличные от нуля элементы поля L. Тогда $\lambda\alpha_1,\ \ldots,\ \lambda\alpha_{p^m-1}$ отличаются от $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{p^m-1}$ только порядком и их произведения совпадают. Следовательно, $\lambda^{p^m-1}=1$ и $\lambda^{p^m}=\lambda$. Последнее равенство верно и для $\lambda=0$.

688. Поле $L=K[x]/(f)$ содержит p^m элементов. В силу результата задачи 687, все элементы поля L, в частности класс $\bar{x}$, являются корнями полинома $x^{p^m}-x$. Но $f(\bar{x})=0$ в L. Следовательно, $x^{p^m}-x$ делится на $f(x)$.

689. Пусть $F(x)=x^{p^m}-x$. Тогда $F'(x)=-1$ и $F(x)$ не может иметь кратных корней. Далее, если $\alpha^{p^m}=\alpha$ и $\beta^{p^m}=\beta$, то $(\alpha+\beta)^{p^m}=$

$=\alpha^{p^m}+\beta^{p^m}=\alpha+\beta$; $(\alpha\beta)^{p^m}=\alpha^{p^m}\beta^{p^m}=\alpha\beta$ и, если $\alpha\neq 0$, то $\alpha^{p^m-2}=\alpha^{-1}$.

690. Пусть $f(x)$ — неприводимый множитель $X_{p^m-1}(x)$. Класс $\bar{x}$ в поле $K[x]/(f)$ является первообразным корнем из 1 степени p^m-1, ибо, в противном случае, f был бы делителем одного из полиномов x^d-1 при $d<p^m-1$, $d\mid p^m-1$ и одного из круговых полиномов с индексом, меньшим p^m-1. Поэтому поле $K(\bar{x})=K[x]/(f)$ содержит все корни из 1 степени p^m-1 и все корни полинома $x^{p^m}-x$. Так как они образуют поле, $K(\bar{x})$ с ним совпадает. Следовательно, степень f равна m.

691. Всякое поле из p^m элементов состоит из корней полинома $x^{p^m}-x$ и изоморфно $L=K[x]/(f)$, где f — некоторый неприводимый полином степени m. В этом поле $x^{p^m}-x$ разлагается на линейные множители (задача 688). Поэтому все неприводимые полиномы степени m порождают изоморфные расширения K.

692. Неприводимые множители полинома $x^{p^m}-x$ порождают поле $GF(p^m)$ и его подполя, которыми являются $GF(p^d)$ при $d\mid m$. Обозначим через $h(n)$ число неприводимых полиномов степени n. Тогда $\sum\limits_{d\mid m} dh(d)=p^m$, откуда, по формуле обращения (задача 67)

$$mh(m)=\sum_{d\mid m}\mu(d)\,p^{\frac{m}{d}}.$$

693. Приводим подробное решение примера f):

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2).$$

Старший член полинома F равен $x_1^4\cdot x_2^2$.

Выпишем показатели в старших членах полиномов, которые будут оставаться после последовательного исключения старших членов посредством вычитания подходящих комбинаций основных симметрических полиномов. Эти показатели:

$$(4,\ 2,\ 0);\quad (4,\ 1,\ 1);\quad (3,\ 3,\ 0);\quad (3,\ 2,\ 1)\ \text{ и }\ (2,\ 2,\ 2).$$

Следовательно, $F=f_1^2f_2^2+Af_1^3f_3+Bf_2^3+Cf_1f_2f_3+Df_3^2$, где A, B, C, D — численные коэффициенты. Определяем их, задавая частные значения для x_1, x_2, x_3.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	F
1	1	0	2	1	0	2
2	−1	−1	0	−3	2	50
1	−2	−2	−3	0	4	200
1	−1	−1	−1	−1	1	8

Для определения A, B, C, D получили систему уравнений:

$$2=4+B,$$
$$50=-27B+4D,$$
$$200=-108A+16D,$$
$$8=1-A-B+C+D,$$

откуда $B=-2$, $D=-1$, $A=-2$, $C=4$.

Итак,

$$(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)=f_1^2f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3-f_3^2.$$

Даем ответы для остальных примеров:

a) $f_1^3-3f_1f_2$; b) $f_1f_2-3f_3$; c) $f_1^4-4f_1^2f_2+8f_1f_3$;

d) $f_1^3f_2^2-2f_1^4f_3-3f_1f_2^3+6f_1^2f_2f_3+3f_2^2f_3-7f_1f_3^2$;

e) $f_1f_2-f_3$; g) $2f_1^3-9f_1f_2+27f_3$;

h) $f_1^2f_2^2-4f_1^3f_3-4f_2^3+18f_1f_2f_3-27f_3^2$.

694. a) $f_1f_2f_3-f_1^2f_4-f_3^2$; b) $f_1^2f_4+f_3^2-4f_2f_4$; c) $f_1^3-4f_1f_2+8f_3$.

695. a) $f_1^2-2f_2$; b) $f_1^3-3f_1f_2+3f_3$;

c) $f_1f_3-4f_4$; d) $f_2^2-2f_1f_3+2f_4$;

e) $f_1^2f_2-f_1f_3-2f_2^2+4f_4$; f) $f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3-4f_4$;

g) $f_2f_3-3f_1f_4+5f_5$; h) $f_1^2f_3-2f_2f_3-f_1f_4+5f_5$;

i) $f_1f_2^2-2f_1^2f_3-f_2f_3+5f_1f_4-5f_5$;

j) $f_1^3f_2-3f_1f_2^2-f_1^2f_3+5f_2f_3+f_1f_4-5f_5$;

k) $f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;

l) $f_2f_4-4f_1f_5+9f_6$; m) $f_3^2-2f_2f_4+2f_1f_5-2f_6$;

n) $f_1^2f_4-2f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;

o) $f_1f_2f_3-3f_1^2f_4-3f_3^2+4f_2f_4+7f_1f_5-12f_6$;

p) $f_2^3-3f_1f_2f_3+3f_1^2f_4+3f_3^2-3f_2f_4-3f_1f_5+3f_6$;

q) $f_1^3f_3-3f_1f_2f_3-f_1^2f_4+3f_3^2+2f_2f_4+f_1f_5-6f_6$;

r) $f_1^2f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3+2f_1^2f_4-3f_3^2+2f_2f_4-6f_1f_5+6f_6$;

s) $f_1^4f_2-4f_1^2f_2^2-f_1^3f_3+2f_2^3+7f_1f_2f_3+f_1^2f_4-3f_3^2-6f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;

t) $f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+$
$+3f_3^2+6f_2f_4+6f_1f_5-6f_6$.

696. $f_k^2-2f_{k-1}f_{k+1}+2f_{k-2}f_{k+2}-2f_{k-3}f_{k+3}+\dots$

697. a) $\dfrac{f_1f_2-3f_3}{f_3}$; b) $\dfrac{2(f_1^2f_2-3f_1f_3-2f_2^2)}{f_1f_2-f_3}$; c) $\dfrac{f_2^3+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+9f_3^2}{f_3^2}$.

698. a) $\dfrac{f_{n-1}}{f_n}$; b) $\dfrac{f_{n-1}^2-2f_{n-2}f_n}{f_n^2}$; c) $\dfrac{f_1f_{n-1}-nf_n}{f_n}$.

699. -4. **700.** -35. **701.** 16.

702. a) $\dfrac{25}{27}$; b) $\dfrac{35}{27}$; c) $-\dfrac{1679}{625}$.

703. a) $a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_2^3a_0+18a_0a_1a_2a_3-27a_0^2a_3^2$;

b) $a_1^3a_3-a_2^3a_0$; c) $\dfrac{a_1a_2}{a_0a_3}-9$; d) $a_1^2a_2^2-a_1^3a_3-a_2^3a_0$.

704. Достаточно доказать для основных симметрических полиномов. Пусть φ_k — основная симметрическая функция степени k от $x_2, x_3, \ldots, x_n$; f_k — основная симметрическая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, что $\varphi_k=f_k-x_1\varphi_{k-1}$, откуда следует:

$$\varphi_k=f_k-x_1f_{k-1}+x_1^2f_{k-2}-\ldots+(-x_1)^{k-1}f_1+(-1)^kx_1^k,$$

$$(-1)^k\varphi_k=a_k+a_{k-1}x_1+\ldots+a_1x_1^{k-1}+x_1^k.$$

706. $s_2=f_1^2-2f_2$;

$s_3=f_1^3-3f_1f_2+3f_3$;

$s_4=f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3-4f_4$;

$s_5=f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;

$s_6=f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+$
$+3f_3^2+6f_2f_4+6f_1f_5-6f_6$.

707. $2f_2=s_1^2-s_2$;

$6f_3=s_1^3-3s_1s_2+2s_3$;

$24f_4=s_1^4-6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2-6s_4$;

$120f_5=s_1^5-10s_1^3s_2+20s_1^2s_3+15s_1s_2^2-20s_2s_3-30s_1s_4+24s_5$;

$720f_6=s_1^6-15s_1^4s_2+40s_1^3s_3+45s_1^2s_2^2-120s_1s_2s_3-15s_2^3-$
$-90s_1^2s_4+40s_3^2+90s_2s_4+144s_1s_5-120s_6$.

708. a) $s_5=859$; b) $s_8=13$; c) $s_{10}=621$.

709. $s_1=-1$, $s_2=s_3=\ldots=s_n=0$. 710. $x^n-a=0$.

711. $x^n-\dfrac{a}{1}x^{n-1}+\dfrac{a^2}{1\cdot 2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\dfrac{a^n}{n!}=0$.

712. $$\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}x^m;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j+x_i)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}s_m;$$

$$\sum_{i<j}(x_i+x_j)^k=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}s_m-2^ks_k\right).$$

713. $$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{2k}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2k}C_{2k}^m(-1)^m s_m s_{2k-m}.$$

716. $n!\,(x^n-f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^nf_n)$.

717. $\dfrac{\varphi(n)}{\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)}\mu\left(\dfrac{n}{d}\right)$, где $d=(m, n)$.

718. Оценки дают последовательно: $|2f_2|\leqslant 2$, $|3f_3|\leqslant 4$, $|4f_4|\leqslant 5$, $|5f_5|\leqslant 9$, $|6f_6|\leqslant 11$, откуда $|f_i|\leqslant 1$, $i=2, 3, 4, 5, 6$.

719.

$$(x-a)(x-b)[x^n+(a+b)x^{n-1}+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=$$
$$=(x-a)[x^{n+1}+ax^n+a^2x^{n-1}+\ldots+a^nx-b(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=$$
$$=x^{n+2}-(a^{n+1}+a^nb+\ldots+b^{n+1})x+ab(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n).$$

Степенные суммы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ для нового полинома, очевидно, равны нулю. Но $\sigma_k=s_k+a^k+b^k$. Следовательно, $s_k=-(a^k+b^k)$ для $1\leqslant k\leqslant n$.

720. Пусть $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Пусть, далее,

$$x^{k-1}\varphi(x)=f(x)\,q_k(x)+r_k(x) \quad \text{и} \quad r_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots+c_{kn}x^{n-1}.$$

Коэффициенты $c_{k,s}$ суть, очевидно, некоторые полиномы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Далее,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \ldots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \ldots & r_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \ldots & r_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \ldots & \varphi(x_n) \\ x_1\varphi(x_1) & x_2\varphi(x_2) & \ldots & x_n\varphi(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}\varphi(x_1) & x_2^{n-1}\varphi(x_2) & \ldots & x_n^{n-1}\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда следует

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)=R(f, \varphi).$$

Последнее равенство есть тождество между полиномами от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и потому остается верным при всех частных значениях этих переменных.

723. a) -7; b) 243; c) 0; d) -59; e) 4854;
f) $(b_0a_2-b_2a_0)^2-(b_0a_1-b_1a_0)(b_1a_2-b_2a_1)$.

724. a) При $\lambda=3$ и $\lambda=-1$;

b) $\lambda=1$, $\lambda=\dfrac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$,

$$\lambda=\frac{-2-\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2};$$

c) $\lambda=\pm\sqrt{-2}$, $\lambda=\pm\sqrt{-12}$.

725. a) $y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0$;

b) $5y^5-7y^4+6y^3-2y^2-y-1=0$; c) $y^3+4y^2-y-4=0$.

726. a) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=-2$,
$y_1=2$; $y_2=3$; $y_3=-1$; $y_4=1$.

b) $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=2$,
$y_1=1$; $y_2=0$; $y_3=2$; $y_4=-1$.

c) $x_1=x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=2$,
$y_1=y_2=-1$; $y_3=1$; $y_4=2$.

d) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=-1$, $x_{5,6}=2$,
$y_1=1$; $y_2=3$; $y_3=2$; $y_4=3$; $y_{5,6}=1\pm i\sqrt{2}$.

e) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=x_5=2$, $x_6=-4$,
$y_1=2$; $y_2=-2$; $y_3=0$; $y_4=y_5=2$; $y_6=2$;
$x_7=4$, $x_8=-6$, $x_9=-{}^2/_3$;
$y_7=6$; $y_8=4$; $y_9={}^4/_3$.

727. $a_0^n a_n^{n-1}$.

728. Пусть $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$;

$\varphi_1(x)=b_0x^k+\ldots+b_k$; $\varphi_2(x)=c_0x^m+\ldots+c_m$.

Тогда

$$R(f,\ \varphi_1\cdot\varphi_2)=a_0^{m+k}\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i)=$$

$$=\left[a_0^m\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\right]\left[a_0^k\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\right]=R(f,\ \varphi_1)\cdot R(f,\ \varphi_2).$$

729. Интересно рассмотреть только случай, когда $n>2$ и m не делится на n. Тогда

$$R(X_n,\ x^m-1)=p^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}\ \text{при}\quad n_1=\frac{n}{d}=p^{\lambda},$$

$R(X_n,\ x^m-1)=1$ во всех остальных случаях.

730. Положим $m\geqslant n$. Тогда

$R(X_m,\ X_n)=0$ при $m=n$;

$R(X_m,\ X_n)=p^{\varphi(n)}$ при $m=np^{\lambda}$;

$R(X_m,\ X_n)=1$ в остальных случаях.

731. a) 49; b) -107; c) -843; d) 725; e) 2777.

732. a) $3125(b^2-4a^5)^2$; b) $\lambda^4(4\lambda-27)^3$;

c) $(b^2-3ab+9a^2)^2$; d) $4(\lambda^2-8\lambda+32)^3$.

733. a) $\lambda=\pm 2$; b) $\lambda_1=3$, $\lambda_{2,3}=3\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;

c) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=125$;

d) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$, $\lambda_{3,4}=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}i\sqrt{3}$.

734. $f=x^n+a$; $f'=nx^{n-1}$; $R(f', f)=n^n a^{n-1}$;

$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$.

735. $D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n q^{n-1}+(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)^{n-1}p^n$.

736. Пусть наибольший общий делитель m и n равен d. Введем обозначения: $m_1=\frac{m}{d}$, $n_1=\frac{n}{d}$.

$$D(f)=(-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} a_0^{n-1} a_2^{m-1}\left[(m+n)^{m_1+n_1} a_0^{m_1} a_2^{n_1}+\right.$$
$$\left.+(-1)^{m_1+n_1-1} n^{n_1} m^{m_1} a_1^{m_1+n_1}\right]^d.$$

737. Дискриминанты равны.

738.
$$x_1x_2+x_3x_4-x_1x_3-x_2x_4=(x_1-x_4)(x_2-x_3);$$
$$x_1x_3+x_2x_4-x_1x_4-x_2x_3=(x_1-x_2)(x_3-x_4);$$
$$x_1x_4+x_2x_3-x_1x_2-x_3x_4=(x_1-x_3)(x_4-x_2).$$

Возведя эти равенства в квадрат и перемножив их, получим требуемый результат.

739. Пусть $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Тогда

$D(f(x)(x-a))=$

$$=a_0^{2n}(a-x_1)^2(a-x_2)^2\dots(a-x_n)^2\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2=D(f(x))[f(a)]^2.$$

740. $D(\varphi)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}$.

741. Пусть $\varphi(x)=x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a$. Тогда

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-1}\frac{(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}}{(1+na)^2}.$$

743. $D\left(X_{p^m}\right)=p^{mp^m-(m+1)p^{m-1}}(-1)^{\frac{1}{2}p^{m-1}(p-1)}$.

744. $D(X_n)=(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}\dfrac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p|n}p^{\varphi(n)/p-1}}$.

745. $D(E_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n!)^n$.

746. $D(F_n)=$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\dots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}}.$$

747. $D(P_n) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n$.

748. $D(P_n) = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \ldots n^{2n-1}$. 749. $D(P_n) = 2^{n-1} n^n$.

750. $D(P_n) = (n+1)^{n-1} \cdot 2^{n(n-1)}$.

751. $D(P_n) = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \ldots n^{2n-1} \cdot 1^{2(n-1)} \cdot 3^{2(n-2)} \ldots (2n-3)^2$.

752. $D(P_n) = 2^2 \cdot 3^4 \ldots n^{2n-2} \cdot (n+1)^{n-1}$.

753.

$$f(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2} R^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} R^4 x^{n-4} - \ldots$$

Легко видеть, что

$$f(x) = R^n P_n\left(\frac{x}{R}\right),$$

где P_n — полином Эрмита.

$$D(f) = R^{n(n-1)} \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n.$$

Это и есть искомый максимум дискриминанта.

754. $2^{2n}(-1)^n a_0 a_n [D(f)]^2$.

755. $m^{mn}(-1)^{\frac{m(m-1)n}{2}} a_0^{m-1} a_n^{m-1} [D(f)]^m$.

756. $F(x) = \prod_{i=1}^{n} (\varphi(x) - x_i)$. Следовательно,

$$D(F) = \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i) \left[\prod_{i<k} R(\varphi(x) - x_i, \ \varphi(x) - x_k)\right]^2.$$

Очевидно далее, что

$$R(\varphi(x) - x_i, \quad \varphi(x) - x_k) = (x_i - x_k)^m.$$

Поэтому

$$D(F) = \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i) \prod_{i<k} (x_i - x_k)^{2m} = [D(f)]^m \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i),$$

что и требовалось доказать.