ГЛАВА VI

757. Имеем

$$f(x)f'(x)=(x-x_0)\left[(f'(x_0))^2+(x-x_0)F(x)\right].$$

Второй сомножитель положителен при x, близких к x_0, а первый меняет знак с $-$ на $+$.

758. $f(x)g(x)=(x-x_0)\left[f'(x_0)g(x_0)+(x-x_0)F(x)\right].$

759. Индекс f_k относительно f_{k-1} равен k, ибо при $-\infty$ число перемен знаков в значениях $f_k, f_{k-1}, \ldots, f_0$ равно k, а при $+\infty$ число перемен знаков равно нулю. Следовательно, все корни f_k вещественны и все они первого типа относительно f_{k-1}. Поэтому в промежутке между соседними корнями f_k имеется корень полинома

f_{k-1}, ибо вблизи левого конца такого промежутка полином $f_{k-1}f_k$ положителен, а вблизи правого — отрицателен.

760. Пусть $f(z) = a_0(z-z_1)\ldots(z-z_n)$. Тогда

$$\Delta \arg f(z) = \Delta \arg (z-z_1) + \ldots + \Delta \arg (z-z_n).$$

Если z_i лежит внутри контура, то $\Delta \arg (z-z_i) = 2\pi$, если z_j вне контура, то $\Delta \arg (z-z_j) = 0$. Это очевидно из геометрических соображений. Поэтому, $\frac{1}{2\pi}\Delta \arg f(z)$ равно числу корней (с учетом кратности) полинома $f(z)$ внутри контура.

761. Все значения функции $1+\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$ при z, изменяющемся вдоль данного контура, находятся внутри круга с центром в точке 1 и с радиусом 1, ибо $\left|\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right| < 1$. Поэтому приращение аргумента $1+\frac{f_2(z)}{f_1(z)}$ равно 0 и $\Delta \arg f(z) = \Delta \arg f_1(z)$.

762. $\Delta \arg h(x) = \Delta \arg (x-z_1) + \ldots + \Delta \arg (x-z_n)$, где $z_1, \ldots, z_n$ — корни полинома $h(z)$. Далее, $\Delta \arg (x-z_i) = \pi$, если z_i лежит в верхней полуплоскости, и $\Delta \arg (x-z_j) = -\pi$, если z_j лежит в нижней полуплоскости. Следовательно, $\Delta \arg h(x) = \pi(n_1-n_2)$.

763. Ассимптотическое направление точки $f(x)+ig(x)$ при $x \longrightarrow \pm\infty$ имеет угловой коэффициент $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$, равный нулю или конечному числу, т. е. оно не параллельно мнимой оси. Поэтому число полуоборотов точки $f(x)+ig(x)$ равно числу переходов через мнимую ось против часовой стрелки минус число переходов через мнимую ось по часовой стрелке. Первое число равно числу корней f первого типа относительно g, второе — числу корней второго типа.

764. Дискриминант равен $a_0^{2-2n}D(f)(\det C)^2$. Число отрицательных коэффициентов в каноническом разложении равно числу пар комплексно сопряженных корней полинома f, ибо $(u+vi)^2+(u-vi)^2 = 2u^2-2v^2$.

765. Дискриминант равен $a_0^{1-2n}f(\lambda)D(f)(\det C)^2$. Число отрицательных квадратов равно числу пар сопряженных комплексных корней полинома f, сложенному с числом вещественных корней, больших λ.

766. Дискриминант равен $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-n}(\det C)^2 g(x_1)\ldots g(x_n)$. Разность числа положительных и числа отрицательных коэффициентов в каноническом разложении равна индексу f относительно g на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

767. $F(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i,j} s_{i+j-2} t_i t_j$, где s_k обозначает сумму k-х степеней корней полинома f.

768. $F_\lambda(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i,j} (\lambda s_{i+j-2} - s_{i+j-1}) t_i t_j$.

769. $\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{f'(x_k)} x_k^{i+j-2} = b_0 u_{i+j+n-3} + \ldots + b_{n-1} u_{i+j-2}$,

где $u_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^m}{f'(x_k)}$. Реккурентные соотношения и начальные условия следуют из сказанного в указании.

770. $F = \sum c_{ij} t_i t_j$, где $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{11} = n$, $c_{1j} = (n-j+1) a_{j-1}$ и при $1 < i \leqslant j$

$c_{ij} = (n-j+1) a_{i-1} a_{j-1} - (j+2-i) a_{i-2} a_j - (j+4-i) a_{i-3} a_{j+1} - \ldots$ (здесь, как обычно, считается $a_k = 0$ при $k \leqslant 0$ или $k \geqslant n+1$).

771. $F_\lambda(t_1, \ldots, t_n) = \sum (\lambda c_{ij} - d_{ij}) t_i t_j$, где при $i \leqslant j$

$c_{ij} = -(j+1-i) a_{i-1} a_j - (j+3-i) a_{i-2} a_{j+1} - \ldots$

$d_{ij} = (n-j+1) a_{i-1} a_{j-1} - (j+2-i) a_{i-2} a_j - (j+4-i) a_{i-3} a_{j+1} - \ldots$

773. a) $f = x^3 - 3x - 1$, $f_1 = x^2 - 1$, $f_2 = 2x + 1$, $f_3 = +1$ Три вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

b) $f = x^3 + x^2 - 2x - 1$, $f_1 = 3x^2 + 2x - 2$, $f_2 = 2x + 1$, $f_3 = +1$. Три вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

c) $f = x^3 - 7x + 7$, $f_1 = 3x^2 - 7$, $f_2 = 2x - 3$, $f_3 = +1$. Три вещественных корня в интервалах $(-4, -3)$, $(1, 3/2)$, $(3/2, 2)$.

d) $f = x^3 - x + 5$, $f_1 = 3x^2 - 1$, $f_2 = 2x - 15$, $f_3 = -1$. Один вещественный корень в интервале $(-2, -1)$.

e) $f = x^3 + 3x - 5$, $f_1 = x^2 + 1$. Один вещественный корень в интервале $(1, 2)$.

774. a) $f = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$, $f_1 = x^3 - 6x - 4$, $f_2 = 3x^2 + 6x + 2$, $f_3 = x + 1$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(4, 5)$.

b) $f = x^4 - x - 1$, $f_1 = 4x^3 - 1$, $f_2 = 3x + 4$, $f_3 = +1$. Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$ и $(1, 2)$.

c) $f = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$, $f_1 = x^3 - 3x^2 + 2x$, $f_2 = 2x^2 - 4x + 1$, $f_3 = x - 1$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

d) $f = x^4 + x^2 - 1$, $f_1 = 2x^3 + x$, $f_2 = -x^2 + 2$, $f_3 = -x$, $f_4 = -1$. Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$.

e) $f = x^4 + 4x^3 - 12x + 9$, $f_1 = x^3 + 3x^2 - 3$, $f_2 = x^2 + 3x - 4$, $f_3 = -4x + 3$, $f_4 = 1$. Вещественных корней нет.

775. a) $f = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$, $f_1 = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5$, $f_2 = 22x^2 - 22x - 45$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$, $(-2, -1)$.

b) $f = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, $f_2 = x^2 + 5x - 3$, $f_3 = -9x + 5$, $f_4 = -1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 1$, $f_2 = 9x^2 - 3x - 5$, $f_3 = 9x + 1$, $f_4 = +1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

d) $f = x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $f_2 = -5x^2 + 10x + 17$, $f_3 = -8x - 5$, $f_4 = -1$. Два вещественных корня в интервалах $(1, 2)$, $(-1, 0)$.

e) $f = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $f_1 = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$, $f_2 = 5x^2 - x - 2$, $f_3 = 18x + 1$, $f_4 = +1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$.

776. a) $f = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4$, $f_2 = 17x^2 - 17x - 8$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$.

b) $f = x^4 - 4x^2 + x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 8x + 1$, $f_2 = 8x^2 - 3x - 4$, $f_3 = 87x - 28$, $f_4 = +1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 2x - 1$, $f_2 = 11x^2 + 14x - 15$, $f_3 = -8x + 7$, $f_4 = -1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

d) $f = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8$, $f_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$, $f_2 = -x^2 + 5x - 5$, $f_3 = -9x + 13$, $f_4 = -1$. Два вещественных корня $x_1 = 2$, $1 < x_2 < 2$.

e) $f = x^4 - x^3 - 2x + 1$, $f_1 = 4x^3 - 3x^2 - 2$, $f_2 = 3x^2 + 24x - 14$, $f_3 = -56x + 31$, $f_4 = -1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

777. a) $f = x^4 - 6x^2 - 4x + 2$, $f_1 = x^3 - 3x - 1$, $f_2 = 3x^2 + 3x - 2$, $f_3 = 4x + 5$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

b) $f = 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1$, $f_1 = 2x^3 - 3x + 1$, $f_2 = 6x^2 - 6x + 1$, $f_3 = 2x - 1$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $(1, 2)$.

c) $f = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 1$, $f_1 = 2x^3 + 6x^2 + 3x$, $f_2 = 9x^2 + 9x + 2$, $f_3 = 13x + 8$, $f_4 = 1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-4, -3)$, $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$.

d) $f=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-8x+4$, $f_2=7x^2-8x-4$, $f_3=4x-5$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$.

e) $f=9x^4-126x^2-252x-140$, $f_1=x^3-7x-7$, $f_2=9x^2+27x+20$, $f_3=2x+3$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(4, 5)$, $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$.

778. a) $f=2x^5-10x^3+10x-3$, $f_1=x^4-3x^2+1$, $f_2=4x^3-8x+3$, $f_3=4x^2+3x-4$, $f_4=x$, $f_5=1$. Пять вещественных корней в интервалах $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$.

b) $f=x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$, $f_1=2x^5-5x^4-4x^3+11x^2-2x-1$, $f_2=3x^4-6x^3-x^2+4x-1$, $f_3=4x^3-6x^2+1$, $f_4=26x^2-26x+5$, $f_5=2x-1$, $f_6=1$. Шесть вещественных корней в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

c) $f=x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$, $f_1=5x^4+4x^3-12x^2-6x+3$, $f_2=4x^3+3x^2-6x-2$, $f_3=3x^2+2x-2$, $f_4=2x+1$, $f_5=1$. Пять вещественных корней в интервалах $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

d) $f=x^5-5x^3-10x^2+2$, $f_1=x^4-3x^2-4x$, $f_2=x^3+3x^2-1$, $f_3=-2x^2+x+1$, $f_4=-3x-1$, $f_5=-1$. Три вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

779. a) $f=x^4+4x^2-1$, $f_1=x$, $f_2=1$. Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

b) $f=x^4-2x^3+3x^2-9x+1$, $f_1=2x-3$, $f_2=1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(2, 3)$.

c) $f=x^4-2x^3+2x^2-6x+1$, $f_1=2x-3$, $f_2=1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(2, 3)$.

d) $f=x^5+5x^4+10x^2-5x-3$, $f_1=x^2+4x-1$, $f_2=5x-1$, $f_3=1$. Три вещественных корня в интервалах $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-6, -5)$.

780. Ряд Штурма образован полиномами x^3+px+q, $3x^2+p$, $-2px-3q$, $-4p^3-27q^2$. Если $-4p^3-27q^2>0$, то $p<0$. Все старшие коэффициенты полиномов Штурма положительны и потому все корни x^3+px+q вещественны. Если $-4p^3-27q^2<0$, то независимо от знака p ряд Штурма имеет при $-\infty$ две перемены знака, при $+\infty$ одну перемену. В этом случае x^3+px+q имеет один вещественный корень.

781. Ряд Штурма образован полиномами x^n+px+q, $nx^{n-1}+p$, $-(n-1)px-nq$, $-p-n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}$.

При нечетном n знак последнего выражения совпадает со знаком $\Delta = -(n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. Если $\Delta > 0$, то необходимо $p < 0$. В этом случае полином имеет три вещественных корня. Если $\Delta < 0$, то независимо от знака p полином имеет один вещественный корень. При четном n при $\Delta > 0$ полином имеет два вещественных корня, при $\Delta < 0$ вещественных корней нет.

782. Ряд Штурма образован полиномами $f = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$, $f_1 = x^4 - 3ax^2 + a^2$, $f_2 = ax^3 - 2a^2x - b$, $f_3 = a(a^2x^2 - bx - a^3)$, $f_4 = a(a^5 - b^2)x$, $f_5 = 1$.

Если $\Delta = a^5 - b^2 > 0$, то $a > 0$, и все старшие коэффициенты полиномов Штурма положительны. В этом случае все пять корней полинома f вещественны. Если $\Delta < 0$, то полином f имеет один вещественный корень.

783. Функции $F(x)$, $F'(x)$ и $[f'(x)]^2$ образуют ряд Штурма для F. Старшие коэффициенты ряда $3a_0^2$, $12a_0^2$ и $9a_0^2$ положительны. Следовательно, число потерь перемен знака при переходе x от $-\infty$ к $+\infty$ равно 2.

Если f имеет двойной корень, то F имеет один тройной корень и один простой. Если f имеет тройной корень, то F имеет четырехкратный.

784. Пусть f_λ и $f_{\lambda+1}$ — два соседних полинома «полного» ряда Штурма. Если их старшие коэффициенты имеют одинаковые знаки, то их значения при $+\infty$ не образуют перемены знака, а значения при $-\infty$ дают перемену знака, так как степень одного из полиномов четная, степень другого нечетная. Если же старшие коэффициенты имеют противоположные знаки, то значения f_λ и $f_{\lambda+1}$ при $+\infty$ дают перемену знака, а при $-\infty$ не дают. Поэтому, обозначив через ν_1 и ν_2 число перемен знака в ряду Штурма при $-\infty$ и $+\infty$, имеем, что $\nu_1 + \nu_2 = n$. С другой стороны, $\nu_1 - \nu_2$ равно числу N вещественных корней полинома. Следовательно, $\nu_2 = \dfrac{n-N}{2}$, что и требовалось доказать.

785. $E_n' = E_{n-1}$. Далее, $E_n = E_{n-1} - \left(-\dfrac{x^n}{n!}\right)$. Поэтому полиномы E_n, E_{n-1} и $-\dfrac{x^n}{n!}$ образуют ряд Штурма для E_n на интервале $(-\infty, -\varepsilon)$ при сколь угодно малом ε. Распределение знаков дается следующей таблицей:

$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n-1}$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$(-1)^{n-1}$

Следовательно, при четном n полином E_n не имеет отрицательных корней, при нечетном n полином E_n имеет один отрицательный корень. Далее, при $x \geqslant 0$ полином $E_n(x) > 0$.

786. Замена n-кратного дифференцирования $(n-1)$-кратным дифференцированием первой производной и применение формулы Эйлера для производной от произведения приводят к соотношению $P_n = xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$, которое обеспечивает доказательство положительности старших коэффициентов и применимость результата задачи 759.

787. Полиномы связаны соотношением $P_n = (x-2n+1)P_{n-1} - (n-1)^2 P_{n-2}$, из которого следует положительность старших коэффициентов и применимость теоремы задачи 759.

788. Подсчитывая двумя способами

$$\frac{d^n\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)}{dx^n} = -\frac{d^n\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{dx^n},$$

получим

$$P_n - 2xP_{n-1} + (x^2+1)P_{n-2} = 0.$$

Старший коэффициент P_n равен $n+1$, в чем легко убедиться по индукции.

789. Развернув по формуле Эйлера тождество

$$\frac{d^n \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^n} = \frac{d^{n-1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^{n-1}},$$

получим

$$P_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)^2(x^2+1)P_{n-2} = 0.$$

Старший коэффициент P_n равен $n!$.

790. Преобразуем посредством формулы Эйлера тождество

$$\frac{d^{n+1}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}} = \frac{d^n\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}\right]}{dx^n}.$$

Получим

$$P_n = (2nx+1)P_{n-1} - n(n-1)P_{n-2}x^2.$$

Старший коэффициент P_n равен $(n+1)!$.

791. В круге радиуса 1 два корня, в круге радиуса 2 все пять корней.

792. a) 4; b) 3; c) 0.

793. Индекс $f(x)$ относительно $g(x)$ должен быть равен $\pm n$, где n — степень $f(x)$. Поэтому все корни f вещественны и одинакового типа. В силу этого (см. решение задачи 759) между соседними корнями f должен находиться по крайней мере один корень g. Если степень g равна $n-1$, то все корни g этим исчерпываются. Если степень g равна n, то n-й корень g тоже вещественный и должен находиться вне интервала между наименьшим и наибольшим корнями f, так как иначе в одном из интервалов между соседними корнями f окажутся два корня g, что невозможно.

794. Пусть $m=n$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — корни полинома $f(x)$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ — корни полинома $g(x)$. Без нарушения общности можно считать, что

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < x_n < y_n.$$

Перепишем уравнение $\lambda f(x)+\mu g(x)=0$ в виде:

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Ясно, что $\psi(x)$ меняется:

от $\frac{a_0}{b_0}$ до $-\infty$ при $-\infty < x < y_1$, обращаясь в 0 при $x=x_1$;

от $+\infty$ до $-\infty$ при $y_k < x < y_{k+1}$, обращаясь в 0 при $x=x_{k+1}$;

от $+\infty$ до $\frac{a_0}{b_0}$ при $y_n < x < +\infty$.

Здесь a_0 и b_0 — старшие коэффициенты $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые мы считаем положительными.

Вследствие непрерывности $\psi(x)$ в каждом из рассмотренных интервалов, уравнение $\psi(x)=-\frac{\mu}{\lambda}$ имеет n вещественных корней, если $-\frac{\mu}{\lambda}\neq\frac{a_0}{b_0}$, и $n-1$ вещественный корень, если $-\frac{\mu}{\lambda}=\frac{a_0}{b_0}$. Таким образом, число вещественных корней уравнения $\lambda f(x)+\mu\varphi(x)$ равно его степени.

Аналогично рассматривается случай, когда $m=n-1$.

795. Пусть $\varphi(z)=c(z-z_0)^k(1+(z-z_0)\omega(z))$. Найдем $\varepsilon>0$ так, что $|(z-z_0)\omega(z)|<\frac{1}{2}$ при $|z-z_0|<\varepsilon$, и будем предполагать, что $\rho<\varepsilon$. Тогда, если $|\psi(z)|<\frac{1}{2}c\rho^k$ на окружности $|z-z_0|=\rho$, то, положив $\varphi_1(z)=c(z-z_0)^k$, $\varphi_2(z)=\varphi(z)+\psi(z)-\varphi_1(z)$, получим, что на окружности $|z-z_0|=\rho$ будет $|\varphi_2(z)|<c\rho^k=|\varphi_1(z)|$. Остается применить теорему Руше.

796. Пусть $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Полином $f(x)-t\,g(x)$ имеет, при достаточно малом t, k корней в окрестности x_0. Среди них при $k\geqslant 2$ имеются комплексные при одном из знаков t.

797. Очевидно, что все корни $f(x)$ и $g(x)$ вещественны. Пусть между двумя соседними корнями x_1 и x_2 полинома $f(x)$ нет корня $g(x)$. Тогда функция $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна при $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и равна нулю на концах. Найдется точка x_0, в которой $\varphi'(x_0)=0$ и, следовательно, $\varphi(x)-\varphi(x_0)$ имеет кратный корень. Тогда $\varphi(x)-\varphi(x_0)-t$ при подходящем t имеет комплексную пару корней, что противоречит условию.

799. $\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}$, где z_k — корни $f(z)$. Пусть $z=a-bi$, $b>0$. Тогда

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f'(a-bi)}{f(a-bi)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b+\operatorname{Im} z_k}{|z-z_k|^2}>0.$$

Следовательно,

$$f'(a-bi)\neq 0.$$

801. Любая выпуклая область есть пересечение содержащих ее полуплоскостей.

802. $\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$ имеет все корни вещественные при любых вещественных постоянных λ и μ (задача 794). Следовательно, в силу теоремы Ролля, $\lambda f_1'(x)+\mu f_2'(x)$ имеет все корни вещественные. Отсюда следует (задача 797), что корни $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ разделяются.

803. Если вещественные части корней полинома $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеют одинаковые знаки, то мнимые части корней полинома

$$i^nf(-ix)=x^n+ia_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-ia_3x^{n-3}+\ldots$$

тоже имеют одинаковые знаки, и обратно.

В силу результата задачи 793, для этого необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов $x^n-a_2x^{n-2}+a_4x^{n-4}-\ldots$ и $a_1x^{n-1}-a_3x^{n-3}+a_5x^{n-5}-\ldots$ были вещественны и разделялись.

804. Нужно, чтобы было $a>0$ и чтобы корни полиномов x^3-bx и ax^2-c были вещественны и разделялись. Для этого необходимо и достаточно условие $0<\frac{c}{a}<b$ или $c>0$, $ab-c>0$.

Итак, для отрицательности вещественных частей всех корней уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств $a>0$, $c>0$, $ab-c>0$.

805. $a>0$, $c>0$, $d>0$, $abc-c^2-a^2d>0$.

806. Положим $x=\frac{1+y}{1-y}$. Легко видеть, что если $|x|<1$, то вещественная часть y отрицательна, и обратно.

Следовательно, для того чтобы все корни x_1, x_2, x_3 уравнения $f(x)=0$ были по модулю меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения $f\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=0$ имели отрицательные вещественнные части. Это уравнение имеет вид

$$y^3(1-a+b-c)+y^2(3-a-b+3c)+y(3+a-b-3c)+ \\ +(1+a+b+c)=0.$$

Легко видеть, кроме того, необходимость условия

$$1-a+b-c=(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)>0.$$

На основании результата задачи 804 получаем необходимые и достаточные условия:

$$1-a+b-c>0;\quad 1+a+b+c>0;\quad 3-a-b+3c>0; \\ 1-b+ac-c^2>0.$$

807. $\frac{1}{x^{n-m}}f(x)=$

$$=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x-b_m-\frac{b_{m+1}}{x}-\ldots-\frac{b_n}{x^{n-m}}.$$

При x, меняющемся от 0 до ∞, первая группа слагаемых возрастает от 0 до ∞, $b_m=\mathrm{const}$, следующие слагаемые возрастают от $-\infty$ до 0. Сумма возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ или от $-b_m$ до $+\infty$.

808. Пусть ρ — единственный положительный корень полинома $b_0x^n-b_1x^{n-1}-\ldots-b_n$ и $|x|>\rho$. Тогда

$$|f(x)|\geqslant|a_0x^n|-|a_1x^{n-1}|-\ldots-|a_n|\geqslant \\ \geqslant b_0|x|^n-b_1|x|^{n-1}-\ldots-|b_n|>0.$$

809. Пусть $\varphi(x)=a_0x^n+\ldots+a_{m-1}x^{n-m+1}-b_mx^{n-m}-\ldots-b_n$, где $b_i=-a_i$ при $a_i<0$ и $b_i=0$ при $a_i\geqslant 0$. Если $x>\rho$, где ρ — единственный положительный корень $\varphi(x)$, то $f(x)\geqslant\varphi(x)>0$.

810. $(x-1)f(x)=a_0x^{n+1}-(a_0-a_1)x^n-\ldots-(a_{n-1}-a_n)x-a_n$. Этот полином имеет единственный положительный корень (задача 807), равный 1. Остается применить результат задачи 808.

811. Полином $f(x)=nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1$ имеет вещественный корень 1. Далее, пусть $F(x)=(x-1)f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$. Тогда $F'(x)=n(n+1)(x-1)x^{n-1}$. При нечетном n полином $F(x)$ имеет единственный минимум при $x=1$ и, следовательно, не имеет корней, кроме двойного корня $x=1$. При четном n полином $F(x)$ возрастает от $-\infty$ до 1 при $-\infty<x\leqslant 0$, убывает от 1 до 0 при $0\leqslant x\leqslant 1$ и возрастает от 0 до ∞ при $1\leqslant x<\infty$. Поэтому $F(x)$ в этом случае имеет единственный корень, кроме корня $x=1$.

812. Все корни $f'(x)$, очевидно, вещественные. Обозначим их $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Далее, обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ корни полинома $f(x)-b$, через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома $f(x)-a$. Тогда

$$y_1<\xi_1<y_2<\xi_2<\ldots<y_{n-1}<\xi_{n-1}<y_n,$$
$$x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\ldots<x_{n-1}<\xi_{n-1}<x_n.$$

Из этих неравенств следует, что интервалы, ограниченные точками x_i, y_i, не пересекаются, ибо они заключены в непересекающихся интервалах

$$(-\infty,\ \xi_1);\quad (\xi_1,\ \xi_2);\ \ldots;\ (\xi_{n-1},\ +\infty).$$

Полином $f(x)$ принимает на концах каждого из рассмотренных интервалов значения a и b и проходит внутри интервала через все промежуточные значения. Следовательно, $f(x)-\lambda$ обращается в 0 на вещественной оси n раз, что и требовалось доказать.

813. Если $256a_4 \leqslant a_1^4$, нужно устроить так, чтобы все корни были отрицательны и один из них был трехкратным (или четырехкратным, если $256a_4 = a_1^4$). Если $256a_4 > a_1^4$, то корни должны составлять две пары сопряженных с одинаковыми вещественными частями (одна из них может вырождаться в двойной корень). Это можно сделать бесконечным множеством способов.

814. Если $f(x)$ не имеет кратных корней, то задача есть частный случай задачи 794. Если $d(x) = (f(x),\ f'(x))$, то утверждение верно для $\frac{f(x)}{d(x)} + \lambda \frac{f'(x)}{d(x)}$. Остается присоединить корни $d(x)$.

815. Пусть $g(x) = a_0(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\ldots(x+\lambda_n)$, $F_0(x) = a_0 f(x)$, $F_1(x) = F_0(x) + \lambda_1 F_0'(x) = a_0 f(x) + a_0\lambda_1 f'(x)$, $F_2(x) = F_1(x) + \lambda_2 F_1'(x) = a_0 f(x) + a_0(\lambda_1+\lambda_2) f'(x) + a_0\lambda_1\lambda_2 f''(x)$ и т. д. Тогда $F_n(x) = F_{n-1}(x) + \lambda_n F_{n-1}'(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x)$, где a_0, $a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты g. В силу результата задачи 814 все корни всех полиномов $F_0, F_1, \ldots, F_n$ вещественны.

817. Полином $a_n x^n + n a_{n-1} x^{n-1} + n(n-1) a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 n!$ имеет только вещественные корни. Следовательно, все корни $a_0 n! x^n + a_1 n(n-1) \ldots 2x^{n-1} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n$ вещественны. Применив еще раз результат задачи 816, получим, что все корни полинома $a_0 n! x^n + a_1 n\cdot n(n-1)\ldots 2x^{n-1} + a_2 n(n-1)\cdot n(n-1)\ldots 3x^{n-2} + \ldots + a_n n!$ вещественны. Остается поделить на $n!$.

818. Все корни полинома

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + x^n$$

вещественны. Остается применить результат задачи 817.

819. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ корни полинома $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Без нарушения общности их можно считать положительными. Тогда $|\Phi(x)| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\alpha x - x_i}{\bar{\alpha} x - x_i} \right|$, где $\Phi(x) = \frac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)}$, $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$. Пусть $x = \rho(\cos\lambda + i\sin\lambda)$. Легко видеть, что $\left| \frac{\alpha x - x_i}{\bar{\alpha} x - x_i} \right|^2 = 1 + \frac{4\rho x_i \sin\theta \sin\lambda}{|\bar{\alpha} x - x_i|^2}$.

Отбросим неинтересный случай $\sin\theta = 0$.

Если $\sin\lambda \neq 0$, то все $\left|\frac{\alpha x - x_i}{\overline{\alpha} x - x_i}\right|$ одновременно больше единицы или одновременно меньше единицы и их произведение не может равняться 1. Следовательно, $\varphi(x) \neq 0$.

820. Пусть

$$\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z - a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Возьмем ρ настолько малым, что $|\varphi(z)| < 1$, $r\rho^k < 1$. Тогда $|f(z)| = |f(a)|\cdot|1 + r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta) + i\sin(\varphi + k\theta)] + r\rho^k\lambda|$, где $|\lambda| < 1$.

При $\theta = \frac{(2m-1)\pi - \varphi}{k}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $|f(z)| < |f(a)|$.

При $\theta = \frac{2m\pi - \varphi}{k}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $|f(z)| > |f(a)|$.

Таким образом, при изменении θ от $\frac{\pi - \varphi}{k}$ до $\frac{\pi - \varphi}{k} + 2\pi$ функция $|f(z)| - |f(a)|$ меняет знак $2k$ раз. Вследствие непрерывности $|f(z)| - |f(a)|$ как функции от θ, $|f(z)| - |f(a)|$ обратится в нуль $2k$ раз, что и требовалось доказать.

821. Так же, как в предыдущей задаче, покажем, что $\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a))$ и $\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(a))$ при $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ меняют знак $2k$ раз при изменении θ на 2π, если только ρ достаточно мало. По формуле Тейлора, положив $\frac{1}{k!}f^{(k)}(a) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получим $f(z) - f(a) = r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta) + i\sin(\varphi + k\theta)][1 + \varphi(z)]$, $\varphi(a) = 0$. Выбрав ρ так, чтобы $|\varphi(z)| < 1$, получим, положив $\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$:
$\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a)) = r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) - \sin(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)]$;
$\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(a)) = r\rho^k[\sin(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) + \cos(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)]$.
Положив $\varphi + k\theta = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots, 2k$, получим

$$\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a)) = r\rho^k(-1)^m(1 + \varepsilon_m),$$

где ε_m — соответствующее значение $\varphi_1(z)$, $|\varepsilon_m| < 1$.

Отсюда следует, что $\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a))$ меняет знак $2m$ раз при обходе z окружности $|z - a| = \rho$. Аналогичный результат получим для $\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(a))$, положив $\varphi + k\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m = 0, 1, \ldots, 2k$.

822. Уравнение разбивается на два:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{ki} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{ki} = 0.$$

Разложение на простейшие дроби дает $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x - x_k} \pm \frac{1}{ki} = 0$, x_k — корни $f(x)$, по предположению вещественные. Пусть $x = a + bi$; тогда

$$\left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x - x_k}\right)\right| = |b|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a - x_k)^2 + b^2} < \frac{n}{|b|}.$$

Для корней каждого из уравнений должно быть $\frac{1}{k} < \frac{n}{|b|}$, откуда $|b| < kn$.

823. —0,6618. **824.** 2,094551.

825. a) 3,3876, —0,5136, —2,8741; b) 2,8931;

c) 3,9489, 0,2172, —1,1660; d) 3,1149, 0,7459, —0,8608.

826. Задача сводится к вычислению корня уравнения $x^3-3x+1=0$, содержащегося в интервале (0, 1). $x=0,347$ (с точностью до 0,001).

827. 2,4908.

828. a) 1,7320; b) —0,7321; c) 0,6180; d) 0,2679;

e) —3,1623; f) 1,2361; g) —2,3028; h) 3,6457; i) 1,6180.

829. a) 1,0953, —0,2624, —1,4773, —2,3556;

b) 0,8270, 0,3383, —1,2090, —2,9563;

c) 1,4689, 0,1168;

d) 8,0060, 1,2855, 0,1960, —1,4875;

e) 1,5357, —0,1537;

f) 3,3322, 1,0947, —0,6002, —1,8268;

g) 0,4910, —1,4910;

h) 2,1462, —0,6821, —1,3178, —4,1463.