ГЛАВА VII

832. Да, только в полугруппе, в которой произведение равно правому сомножителю.

833. 1) Произведение равно правому сомножителю; 2) произведение равно левому сомножителю; 3) $\{0, a\}$, $a^2 = 0$; 4) $\{0, 1\}$; 5) $\{1, a\}$, $a^2 = 1$.

834. 1) $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$; 2) $\{a, a^2, \ldots, a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+l-1}\}$, причем $a^{k+l} = a^k$; если $l = 1$, то a^k есть нуль полугруппы; если $k = 1$, то a^l единица и полугруппа является группой.

836. Полугруппа, в которой произведение равно левому сомножителю.

837. Полугруппа натуральных чисел относительно умножения.

842. В качестве a^+ можно взять только транспонированную матрицу.

845. Порядок равен $2^n n!$.

847. $f_1(x) = a_1 x + b_1$, $f_2(x) = a_2 x + b_2$. Тогда

$$f_2(f_1(x)) = a_1 a_2 x + (a_1 b_2 + b_1).$$

852. Изоморфизм осуществляется показательной функцией.

853. Каждое такое преобразование осуществляет подстановку вершин треугольника.

854. Каждое такое движение осуществляет подстановку пар противоположных вершин и обратно, любая подстановка пар противоположных вершин может быть осуществлена движением куба.

856. Порядок равен $2n$.

857. $(ab)^2=1$ влечет $ab=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=ba$.

858. a) $H=\{1, a^2, a^4, a^6\}$, $Ha=\{a, a^3, a^5, a^7\}$, где a образующая.

b) $H=\{1, (12)\}$, $H\sigma=\{(123), (13)\}$, $H\sigma^2=\{(132), (23)\}$, $\sigma=(123)$.

c) H — циклическая группа порядка 4. Элементы, составляющие один класс смежности, — вращения, переводящие исходную грань в какую-либо другую.

d) Классы смежности — множества матриц с фиксированным определителем.

859. Пусть m — порядок группы. Тогда $a=a^{m+1}=b^2$, где $b=a^{\frac{m+1}{2}}$. Обратно, если $a=b^2$, то $b=b^{m+1}=a^{\frac{m+1}{2}}$.

860. Наибольший порядок 60 имеет подстановка, составленная из циклов 3-го, 4-го и 5-го порядков.

861. Вся группа, единичная подгруппа и циклическая подгруппа третьего порядка — нормальные делители. Три подгруппы второго порядка сопряжены.

862. Переход к обратным элементам осуществляет взаимно однозначное соответствие между правыми и левыми классами смежности.

863. H и $G \setminus H$ являются одновременно правыми и левыми классами смежности.

864. Имеет место формула $(G:H)=(G:K)(K:H)$, где $(G:H)$ обозначает индекс подгруппы H в группе G.

865. Если $z \in H_1z_1 \cap H_2z_2$, то $H_1z_1=H_1z$, $H_2z_2=H_2z$ и $H_1z_1 \cap H_2z_2=H_1z \cap H_2z=(H_1 \cap H_2)z$. Индекс $(G:H)$ равен числу непустых пересечений $H_1z_1 \cap H_2z_2$.

866. Если a принадлежит центру и c — любой элемент группы, то $c^{-1}ac=a$.

867. Число элементов в классе сопряженных равно 1 для элементов центра, в частности, для единицы, и является степенью p для нецентральных. Следовательно, центр нетривиален, иначе число элементов группы не делилось бы на p.

868. Если группа содержит элемент порядка p^2, то она циклическая. Если нет, то имеется центральный элемент a порядка p. Если b — элемент, не входящий в циклическую подгруппу, порожденную a, то $b^p=1$, $ab=ba$ и все элементы однозначно записываются в виде a^kb^m, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$.

869. 1) Циклическая группа. 2) Группа с коммутирующими образующими a, b, c; $a^2=b^2=c^2=1$. 3) Группа с коммутирующими образующими a, b; $a^4=1$, $b^2=1$. 4) Группа диэдра: $a^4=1$, $b^2=1$, $bab=a^3$. 5) Группа кватернионов: $a^4=1$, $b^2=a^2$, $b^{-1}ab=a^3$.

870. Следует из правила умножения комплексных чисел. Ядро — аддитивная группа целых кратных 2π.

871. Ясно, что сумме полиномов соответствует сумма строк. Изоморфизм следует из существования и единственности интерполяционного полинома.

872. Ядром является аддитивная группа полиномов, делящихся на $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

873. Если $x^m=1_G$, то $(\varphi(x))^m=1_H$.

875. Число элементов в классе сопряженных элементов равно индексу централизатора любого из них.

876. Подстановки, имеющие одинаковые разложения на циклы.

877. Групповые аксиомы легко проверяются (коммутативность H используется при проверке ассоциативности G). В силу задачи 861, всякий элемент из H есть квадрат другого. Поэтому $xa=y^2a=yay^{-1}$.

878. Пусть $a\in K$. Централизатор элемента a имеет порядок 2, а следовательно совпадает с $\{1, a\}$, причем $a^2=1$. Если $b\neq a$ и $b\in K$, то из $(ab)^2=1$ следует $bab=a$, т. е. b принадлежит централизатору, что невозможно. Поэтому $aK=G\setminus K$. Если допустить, что $ab_1ab_2=b_3\in K$ (при $b_1, b_2\in K$), то $(b_3b_2)^2=1$, что невозможно. Следовательно, $H=aK$ есть подгруппа и нормальный делитель. Ее порядок нечетный, так как в ней нет элементов второго порядка. Далее $K=aH$. Поэтому, при любом $x\in H$ будет $(ax)^2=1$, так что $axa=x^{-1}$, следовательно, $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}=x_1x_2ax_1aax_2a=$ $=x_1x_2(x_1x_2)^{-1}=1$, т. е. H — абелева группа.

879. Циклическая группа 3-го порядка и симметрическая группа S_3.

880. Две группы 4-го порядка, группа диэдра порядка 10 и знакопеременная группа A_4.

882. Существует конечное число подгрупп, сопряженных с H (задача 881), и их пересечение имеет конечный индекс (задача 865).

883. Отображение, данное в указании, гомоморфно, его ядро является нормальным делителем, образом — группа подстановок n элементов, порядок которой есть делитель $n!$.

884. a) Если $aba^{-1}b^{-1}=1$, то $ab=ba$ и обратно.

b) Достаточно показать, что элемент, обратный к коммутатору, есть коммутатор. Но $(aba^{-1}b^{-1})^{-1}=bab^{-1}a^{-1}$.

c) $c^{-1}(aba^{-1}b^{-1})c=(c^{-1}ac)(c^{-1}bc)(c^{-1}ac)^{-1}(c^{-1}bc)^{-1}$.

d) Образы всех элементов после факторизации по коммутанту коммутируют, ибо их коммутаторы обращаются в единицу.

e) Если G/H абелева, то все коммутаторы попадают в ядро при факторизации по H.

885. $aba^{-1}b^{-1}=(aba^{-1})b^{-1}\in B$; $aba^{-1}b^{-1}=a(ba^{-1}b^{-1})\in A$.

886. Непосредственно следует из предыдущей задачи.

887. Если группа G имеет нетривиальный центр Z, то либо Z, либо G/Z содержит элемент порядка p. Во втором случае берем элемент G из класса смежности G/Z порядка p. Он порождает циклическую группу, порядок которой делится на p. Таким образом, в обоих случаях задача сводится к случаю абелевой группы.

Если же центр состоит только из единицы, то найдется класс сопряженных элементов, число элементов которого не делится на p. Централизатор любого элемента этого класса есть подгруппа G, порядок которой делится на p, и можно применить индукцию.

888. В группе порядка $2p$ имеется подгруппа порядка p и порядка 2 (задача 887). Группа порядка p есть нормальный делитель (задача 863). Если a — образующий этой группы и b — элемент порядка 2, то $bab=a^k$, $b^2ab^2=a=a^{k^2}$, откуда $k^2\equiv 1$, $k\equiv\pm 1 \pmod p$. Если $k\equiv 1$ — циклическая группа, если $k\equiv -1$ — группа диэдра.

889. Если $p\not\equiv 1 \pmod q$, то существует только циклическая группа. Если $p\equiv 1 \pmod q$, a — элемент порядка p, b — элемент порядка q, f — первообразный корень степени q в поле вычетов GF (p), то группа задается образующими a, b и соотношениями $a^p=1$, $b^q=1$, $b^{-1}ab=a^f$. Замена образующего b влечет замену f на другие первообразные корни.

891. Если $(E+mA)^n=E$, то $nA+\dfrac{n(n-1)}{2}mA^2+\ldots=0$. Если m делится на простое $p\geqslant 3$ или на p^2, $p=2$, то нетрудно убедиться, что для некоторой позиции i, j все слагаемые, начиная со второго, делятся на более высокую степень p, чем первое.

892. Сопряженными являются все повороты на один и тот же угол.

893. Очевидно, что центр SO (3) тривиален и среди $CAC^{-1}A^{-1}$ имеются вращения на угол φ_0, отличный от 0. Если $C=E$, то $CAC^{-1}A^{-1}=E$. В силу непрерывной зависимости угла поворота от C элементы $CAC^{-1}A^{-1}$ реализуют вращения на все углы от 0 до φ_0, а их квадраты, кубы и т. д. реализуют вращения на все возможные углы. Таким образом, H содержит все классы сопряженных элементов и совпадает с SO (3).

894. Такие циклы образованы элементами a, ax, ..., ax^{m-1}, где m — порядок x.

895. Пусть m — порядок элемента x, тогда $n=md$. Подстановка, соответствующая x, распадается на d циклов длины m и ее четность или нечетность определяется четностью или нечетностью числа $d(m-1)$. Для четности подстановки необходимо и достаточно, чтобы m было четным и d нечетным. Если $n=2^kn_1$ при нечетном n_1, m должно делиться на 2^k. Пусть $m=2^km_1$. Тогда $y=x^{m_1}$ есть элемент порядка 2^k. Подстановка, соответствующая элементу y, тоже будет нечетной.

896. Из решения задачи 895 следует, что ядро G_1 упомянутого в указании гомоморфизма состоит из элементов, порядки которых не делятся на 2^k. Группа G_1 снова удовлетворяет условию и для нее имеется гомоморфизм на $\{\pm 1\}$ с ядром G_2, состоящим из элементов, порядки которых не делятся на 2^{k-1} и т. д. В качестве G_k получим подгруппу, состоящую из элементов нечетного порядка. Все группы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — нормальные делители G, ибо они характеризуются порядками элементов, а порядки не изменяются при сопряжении.

898. Если $Hax = Ha$, то $axa^{-1} \in H$ и $x \in a^{-1}Ha$. Элементу x отвечает единичная подстановка, если $Hax = Ha$ при всех a, т. е. если $x \in \bigcap a^{-1}Ha$. Обратно, если $x \in \bigcap a^{-1}Ha$, то $Hax = Ha$ при всех a, т. е. элементу x соответствует единичная подстановка.

899. Группа автоморфизмов бесконечной циклической группы имеет порядок 2, ибо она содержит только один нетривиальный автоморфизм $a \longrightarrow a^{-1}$. Группа автоморфизмов конечной циклической группы порядка m изоморфна мультипликативной группе кольца вычетов по модулю m.

900. Обозначим порядок группы диэдра через $2m$. Группа автоморфизмов изоморфна группе линейных функций $x \longrightarrow ax + b$ с коэффициентами в кольце вычетов по модулю m, причем a взаимно просто с m.

901. Группа автоморфизмов изоморфна полной линейной группе $\mathrm{GL}(m, K)$ над полем $K = \mathrm{GF}(p)$. Здесь через m обозначено число прямых слагаемых.

902. Группа автоморфизмов изоморфна группе вращений, совмещающих куб, и, следовательно (см. задачу 854), симметрической группе S_4 подстановок четырех элементов.

903. Ассоциативный закон легко проверяется, пара $(1, 1)$ является единицей и $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, (h^{g^{-1}})^{-1})$.

904. Сопоставление $(f, h) \longrightarrow fh$ есть гомоморфизм полупрямого произведения на FH, ибо $(f_1, h_1)(f_2, h_2) = (f_1 f_2, h_1^{f_2} h_2)$ и $f_1 h_1 f_2 h_2 = f_1 f_2 f_2^{-1} h_1 f_2 h_2 = f_1 f_2 h_1^{f_2} h_2$.

905. Порядок Φ равен mk^m, порядок U равен k^{m-1}, так что $(\Phi : U) = km$. Подгруппы, сопряженные с U, состоят из пар $(1, f)$, где f — функции, принимающие значение 1 на фиксированном аргументе. Поэтому пересечение подгрупп, сопряженных с U, есть $(1, 1)$, и представление подстановками классов смежности изоморфно.

906. Пусть автоморфизм $h \longrightarrow h^g$ при $h \in H$, $g \in G$ задан. Сопоставим элементу (g, f) сплетения элемент $\left(g, \prod_{x \in G} (f(x))^{x^{-1}}\right)$ полупрямого произведения GH. Легко проверяется, что это отображение есть гомоморфизм на GH.

907. Элементы x_1, входящие в пары $(x_1, 1) \in F$, составляют нормальный делитель M_1 группы H_1. Соответственно, элементы x_2, входящие в пары $(1, x_2) \in F$, составляют нормальный делитель M_2 группы H_2. Прямое произведение $M_1 M_2$ есть нормальный делитель F и $H_1/M_1 \simeq F/M_1 M_2 \simeq H_2/M_2$. Таким образом, между группами H_1/M_1 и H_2/M_2 имеется изоморфизм и пары $(y_1, y_2) \in F$ составлены из элементов, принадлежащих соответствующим в силу этого изоморфизма классам смежности H_1/M_1 и H_2/M_2.

908. Указанная подгруппа есть ядро гомоморфизма свободной группы на аддитивную группу вычетов по модулю m. Этот гомоморфизм сопоставляет каждому слову сумму показателей при образующих.

909. Сопоставим каждому элементу строку из сумм показателей при образующих. Это отображение есть гомоморфизм на свободную абелеву группу с k образующими. Ядро этого гомоморфизма совпадает с H. Так как G/H абелева, H содержит коммутант. Но все коммутаторы содержатся в H, следовательно, H совпадает с коммутантом.

910. Так как длина произведения элементов G отличается на четное число от суммы длин, сопоставление элементу длины k числа $(-1)^k$ есть гомоморфизм и его ядро H составлено из всех элементов четной длины. Далее, $b_i a = (ab_i)^{-1}$, $b_i b_j = (ab_i)^{-1} ab_j$, так что $c_i = ab_i$ — образующие H. Для установления их свободы достаточно показать, что в несократимом слове из c_i и обратных, после замены c_i на ab_i ни один образующий b_i, $i = 1, \ldots, n$, не сокращается, в чем легко убедиться методом индукции по длине слова.

911. Если $x \in H$, $x = a_1 \ldots a_m = b_1 \ldots b_n$, где a_i, b_j суть образующие и им обратные, то $a_1^{-1} \ldots a_m^{-1} = b_1^{-1} \ldots b_n^{-1}$, в силу свойства соотношений в H. Поэтому отображение $\alpha(x) = a_1^{-1} \ldots a_m^{-1}$ не зависит от представления x через образующие и является автоморфизмом второго порядка.

912. Ясно, что $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$. Пусть $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 = 1$, где α_i принимают значения σ_x, σ_y, σ_z, причем α_i и α_{i+1} различны, $i = 1, \ldots, n-1$. Возьмем точку M_0 из области $x^2 + y^2 > z^2$, $y^2 + z^2 > x^2$,

$$z^2 + x^2 > y^2 \left(\text{например, точку } x = y = z = \frac{3}{a}\right) \text{ и положим } M_1 = \alpha_1 M_0,$$

$M_2 = \alpha_2 M_1, \ldots, M_n = \alpha_n M_{n-1}$. Тогда $M_n = M_0$, $M_{n-1} = \alpha_n M_0$. Пусть M_k — точка с наибольшей суммой координат. Тогда $k > 0$ и $k < n$, ибо сумма координат точки M_0 меньше чем для точек M_1 и M_{n-1}. Далее, $M_{k+1} = \alpha_{k+1} M_k$ и $M_{k-1} = \alpha_k M_k$. В силу первого замечания в указании должно быть $\alpha_k = \alpha_{k+1}$, и мы пришли к противоречию.

915. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полином, меняющий знак при нечетных перестановках переменных. Так как $F(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n) =$

$= -F(x_2, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ делится на $x_1 - x_2$. Аналогично доказывается, что $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ делится на все разности $x_i - x_k$. Следовательно, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ делится на $\Delta = \prod_{i>k}(x_i - x_k)$, равное определителю Вандермонда. Ввиду того, что определитель Δ меняет знак при нечетных перестановках переменных, $\frac{F}{\Delta}$ — симметрический полином.

916. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полином, не меняющийся при четных перестановках переменных. Обозначим через $\overline{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полином, получающийся из $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ посредством какой-либо определенной нечетной перестановки.

Нетрудно проверить, что при каждой нечетной перестановке φ переходит в $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ в φ. Следовательно, $\varphi + \overline{\varphi}$ не меняется при всех перестановках, $\varphi - \overline{\varphi}$ меняет знак при нечетных перестановках. Далее,

$$\varphi = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2} + \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2} = F_1 + F_2\Delta,$$

где Δ — определитель Вандермонда. На основании результата задачи 915 F_2 есть симметрический полином; F_1 — тоже симметрический полином, так как не меняется при всех перестановках переменных.

917. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно выразить линейно через f_1, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$. Следовательно, каждый полином от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно представить в виде полинома от $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

При круговой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одночлен $A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ приобретает множитель $\varepsilon^{-(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1})}$. Следовательно, для того чтобы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не менялся при круговых перестановках переменных, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1}$ делилось на n.

918. Можно взять $f_1, \eta_1^n, \eta_2\eta_1^{-2}, \ldots, \eta_{n-1}\eta_1^{-(n-1)}$.

919. Пусть $\eta_1 = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$; $\eta_2 = x_1 + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\frac{\eta_1^2}{\eta_2} = \varphi_1 + i\sqrt{3}\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — некоторые рациональные функции от x_1, x_2, x_3 с рациональными коэффициентами, не меняющиеся при круговой перестановке x_1, x_2, x_3. Легко видеть, что через $f_1 = x_1 + x_2 + x_3$, φ_1 и φ_2 рационально выражается каждая рациональная функция от x_1, x_2, x_3, не изменяющаяся при круговой перестановке переменных.

Достаточно это доказать для $\eta_2\eta_1^{-2}$ и η_1^3. Но

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\frac{1}{\varphi_1+i\varphi_2\sqrt{3}};$$

$$\eta_1^3=\left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2}\right)^2\cdot\frac{\eta_2^2}{\eta_1}=(\varphi_1+i\varphi_2\sqrt{3})^2(\varphi_1-i\varphi_2\sqrt{3}).$$

920. При $n=4$

$$\begin{aligned}\eta_1&=x_1+ix_2-x_3-ix_4,\\ \eta_2&=x_1-x_2+x_3-x_4,\\ \eta_3&=x_1-ix_2-x_3+ix_4.\end{aligned}$$

Положим $\theta_1=\eta_1\eta_3$; $\theta_2+i\theta_3=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$; $\theta_2-i\theta_3=\frac{\eta_3\eta_2}{\eta_1}$. θ_1, θ_2, θ_3 суть рациональные функции с рациональными коэффициентами от x_1, x_2, x_3, x_4, не меняющиеся при круговых перестановках. Легко видеть, что они вместе с $f=x_1+x_2+x_3+x_4$ образуют систему основных функций. Действительно,

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\frac{\theta_2-i\theta_3}{\theta_1};\qquad \eta_3\eta_1^{-3}=\frac{\theta_2-i\theta_3}{\theta_1(\theta_2+i\theta_3)};\qquad \eta_1^4=\frac{\theta_1^4(\theta_2+i\theta_3)}{\theta_2-i\theta_3}.$$

921. Пусть

$$\begin{aligned}\eta_1&=x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon^3+x_4\varepsilon^4+x_5,\\ \eta_2&=x_1\varepsilon^2+x_2\varepsilon^4+x_3\varepsilon+x_4\varepsilon^3+x_5,\\ \eta_3&=x_1\varepsilon^3+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^4+x_4\varepsilon^2+x_5,\\ \eta_4&=x_1\varepsilon^4+x_2\varepsilon^3+x_3\varepsilon^2+x_4\varepsilon+x_5.\end{aligned}$$

Рассмотрим рациональную функцию $\lambda_1=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$ и расположим ее по степеням ε, заменив 1 на $-\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3-\varepsilon^4$:

$$\lambda_1=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\varepsilon^3\varphi_3+\varepsilon^4\varphi_4.$$

Коэффициенты φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 суть рациональные числа. Заменяя ε на ε^2, ε^3 и ε^4, получим:

$$\lambda_2=\frac{\eta_2\eta_4}{\eta_1}=\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\varepsilon\varphi_3+\varepsilon^3\varphi_4,$$

$$\lambda_3=\frac{\eta_3\eta_1}{\eta_4}=\varepsilon^3\varphi_1+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^4\varphi_3+\varepsilon^2\varphi_4,$$

$$\lambda_4=\frac{\eta_4\eta_3}{\eta_2}=\varepsilon^4\varphi_1+\varepsilon^3\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_3+\varepsilon\varphi_4.$$

За «основные функции» можно взять f, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Действительно, через них выражаются рационально λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Далее,

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_4^{-1},\qquad \eta_4\eta_1^{-4}=\lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1},$$
$$\eta_3\eta_1^{-3}=\lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_4^{-1},\qquad \eta_1^5=\lambda_1^3\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^2.$$

922. Пусть $S_n = \bigcap H\sigma_i$ — разложение S_n по H, и пусть g^{σ_i} — полином, который получается из g подстановкой σ_i. Искомый полином есть

$$F(t) = \prod_{\sigma_i} (t - g^{\sigma_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)).$$

923. $y^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)y + (a^2 - 3b)^3 = 0$.

924. a) $y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (a^2d + c^2 - 4bd) = 0$

(резольвента Феррари);

b) $y^3 - (3a^2 - 8b)y^2 + (3a^4 - 16a^2b + 16b^2 + 16ac - 64d)y - - (a^3 - 4ab + 8c)^2 = 0$

(резольвента Эйлера).

925.

$$x = \frac{\pm\sqrt{4a + \sqrt[3]{b^2 - 64a^3}} \pm \sqrt{4a + \varepsilon\sqrt[3]{b^2 - 64a^3}} \pm \sqrt{4a + \varepsilon^2\sqrt[3]{b^2 - 64a^3}}}{2},$$

$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Знаки квадратных корней выбираются так, чтобы их произведение равнялось $-b$.

926. $(y + a)^4 (y^2 + 6ay + 25a^2) + 3125b^4y = 0$.

Корнями искомого уравнения являются:

$$y_1 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)(x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1);$$
$$y_2 = (x_1x_3 + x_3x_2 + x_2x_5 + x_5x_4 + x_4x_1)(x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_3 + x_3x_5 + x_5x_1);$$
$$y_3 = (x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_3 + x_3x_1 + x_1x_5)(x_5x_4 + x_4x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_5);$$
$$y_4 = (x_2x_1 + x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_4 + x_4x_2)(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_5 + x_5x_2);$$
$$y_5 = (x_5x_3 + x_3x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_5)(x_5x_2 + x_2x_1 + x_1x_3 + x_3x_4 + x_4x_5);$$
$$y_6 = (x_2x_1 + x_1x_4 + x_4x_3 + x_3x_5 + x_5x_2)(x_2x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 + x_1x_3 + x_3x_2).$$

Искомое уравнение, очевидно, имеет вид

$$y^6 + c_1ay^5 + c_2a^2y^4 + c_3a^3y^3 + c_4a^4y^2 + (c_5a^5 + c_6b^4)y + (c_7a^6 + c_8ab^4) = 0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_8$ — абсолютные постоянные. Для их определения положим $a = -1$, $b = 0$ и $a = 0$, $b = -1$. Получим

a	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
-1	0	1	i	-1	$-i$	0	1	$3-4i$	1	1	$3+4i$	1
0	-1	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4	0	-5	$-5\varepsilon^4$	$-5\varepsilon^3$	$-5\varepsilon^2$	-5ε

В первом случае искомое уравнение имеет вид:

$$(y-1)^4(y^2-6y+25)=0.$$

Во втором случае $y^6+3125y=0$. Отсюда мы определим все коэффициенты, кроме c_8. Легко проверить, что $c_8=0$. Для этого можно взять, например, $a=-5$, $b=4$. В этом случае $x_1=x_2=1$, а остальные корни удовлетворяют уравнению $x^3+2x^2+3x+4=0$, и все необходимые вычисления проводятся без труда.