ГЛАВА VIII

927. Множество функций ничем, кроме способа описания, не отличается от арифметического пространства конечных последовательностей, которое тоже можно рассматривать, как пространство функций на множестве $N=\{1, 2, \ldots, n\}$.

928. a) f_1, f_2 и f_3 линейно независимы; b) f_1 и f_2 линейно независимы, $f_3=2f_1-f_2$; c) f_1 и f_2 линейно независимы, $f_3=f_1+2f_2$, $f_4=2f_1-f_2$; d) f_1, f_2 и f_3 линейно независимы; e) f_1 и f_2 линейно независимы, $f_3=-f_1+f_2$, $f_4=-5f_1+4f_2$; f) f_1, f_2 и f_3 линейно независимы, $f_4=f_1+f_2-f_3$; g) f_1, f_2 и f_4 линейно независимы, $f_3=2f_1-f_2$; h) f_1 и f_2 линейно независимы, $f_3=3f_1-f_2$, $f_4=f_1-f_2$; i) f_1, f_2, f_3 и f_4 линейно независимы; j) f_1, f_2, f_3 линейно независимы, $f_4=f_1-f_2-f_3$.

929. В обоих случаях можно. a) $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; b) $(1, 0, -1, 0)$.

931. При $n=2$: плоскость может быть разбита на три угла, стороны которых проходят через e_1, e_2, e_3. При $n=3$: пространство разбивается на четыре трехгранных угла, с ребрами, проходящими через e_1, e_2, e_3, e_4.

932. $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})=q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)(q^2-1)\ldots$ $\ldots(q^n-1)$.

933. В примерах a), b) и c) размерность равна 2, в качестве базиса можно взять f_1 и f_2.

934. a) Размерность пересечения равна 1, базисный вектор есть $h=(5, -2, -3, -4)=f_1-4f_2=3g_1-g_2$. Базисы подпространств: h, f_1 и h, g_1, базис суммы h, f_1, g_1.

b) Пересечение совпадает со вторым подпространством. Подходящий базис первого: g_1, g_2, f_1. Он же есть базис суммы.

c) Пересечение состоит из нулевого вектора, сумма — все четырехмерное пространство.

d) Пересечение одномерно. Базисный вектор: $g_2=2f_1+f_2-f_3$. Базисы подпространств: f_1, f_2, g_2 и g_1, g_2, базис суммы f_1, f_2, g_1, g_2.

e) Базис пересечения: $h_1=g_2-g_1=2f_3-2f_2$ и $h_2=g_3-g_1=$ $=2f_3-2f_1$. Базисы подпространств: h_1, h_2, f_1 и h_1, h_2, g_1. Сумма — все четырехмерное пространство.

935. a) $P+Q=M$; $P\cap Q$ — пространство диагональных матриц; b) $P+Q=M$; $P\cap Q=0$;

c) $P+Q$ состоит из матриц, имеющих равные элементы на линиях, параллельных главной диагонали и расположенных под ней; $P\cap Q$ состоит из скалярных матриц a_1E.

936.

$$a)\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix};\quad b)\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$

937. $8x_1'x_2'+8x_3'x_4'=1$.

939. $\dfrac{\psi_n(q)}{\psi_m(q)\,\psi_{n-m}(q)}$, где $\psi_k(q)=(q-1)(q^2-1)\ldots(q^k-1)$.

940. $q^{km}\dfrac{\psi_{n-k}(q)}{\psi_m(q)\,\psi_{n-k-m}(q)}$ при $k+m\leqslant n$. Иначе решения нет.

946. Каждый полином из S однозначно представляется в виде $f_1u_1+f_2u_2$ со слагаемыми из S.

947. $\dim(P_1+Q)\cap(P_2+Q)=2$. В качестве базиса можно взять компоненты в разложении базисного вектора Q по подпространствам P_1 и P_2.

948. $\dim(P_1+Q)\cap(P_2+Q)=2k$. В качестве базиса можно взять объединение компонент базисных векторов Q по подпространствам P_1 и P_2.

949. $q^{\frac{k(k-1)}{2}}\dfrac{\psi_{m_1}(q)\,\psi_{m_2}(q)}{\psi_{m_1-k}(q)\,\psi_{m_2-k}(q)\,\psi_k(q)}$, при $k\leqslant\min(m_1,\ m_2)$.

Иначе задача не имеет решения.

953. Если $x_1+P_1=x_2+P_2$, то $x_2\in x_1+P_1$, что влечет $x_2-x_1\in P_1$ и $P_2=x_1-x_2+P_1=P_1$. Если $x_2-x_1\in P_1=P_2$, то $x_2+P_2=x_1+$ $+(x_2-x_1)+P_1=x_1+P_1$.

954. $\{(1-c)\,x_1+cx_2\}=\{x_1+c\,(x_2-x_1)\}$ есть прямая, содержащая x_1 и x_2. Если прямая $L=x_0+P$ содержит x_1, то $x_1-x_0\in P$ и $L=x_1+P$. Тогда $x_2\in L$ влечет $x_2-x_1\in P$. Поэтому $P=\{c\,(x_2-x_1)\}$ и $L=\{x_1+c\,(x_2-x_1)\}$.

955. 1) $y_1\in P$ означает, что $y_1=x_1-x_0$, где x_1, $x_0\in M$. Тогда $cy_1=(1-c)\,x_0+cx_1-x_0\in P$.

2) $y_1\in P$ и $y_2\in P$ означает, что $y_1=x_1-x_0$, $y_2=x_2-x_0$ при x_0, x_1, $x_2\in M$. Тогда $(1-c)\,y_1+cy_2=(1-c)\,x_1+cx_2-x_0\in P$.

3) Возьмем $c \neq 0$ и $c \neq 1$. Имеем: $c_1 y_1 + c_2 y_2 = (1-c) \frac{c_1}{1-c} y_1 + + c \frac{c_2}{c} y_2 \in P$.

956. Пересечение состоит из единственной точки $x_0 - u = y_0 + v$, где $x_0 - y_0 = u + v$, $u \in P$, $v \in Q$.

957. $x_0 - y_0 \in P + Q$.

958. $(x_0 + P) \cap (y_0 + Q) = x_0 - u + P \cap Q$, где $x_0 - y_0 = u + v$, $u \in P$, $v \in Q$.

959. Не больше 3.

960. Точка пересечения с первой прямой имеет координаты $\left(\frac{14}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}\right)$, со второй (42, 1, 7, 11).

961. Для разрешимости задачи для прямых $X_0 + tX_1$, $Y_0 + tY_1$ необходимо и достаточно, чтобы векторы X_0, Y_0, X_1, Y_1 были линейно зависимы. Это равносильно тому, что прямые можно заключить в трехмерное подпространство, содержащее начало координат.

962. $x_0 + P + Q + L$, где L — одномерное подпространство, натянутое на вектор $y_0 - x_0$. Размерность равна $\dim (P + Q)$, если пересечение не пусто, и равна $\dim (P + Q) + 1$, если пересечение пусто.

963. $k = 5$. Тогда пересечение пусто, $P \cap Q = 0$. Плоскости скрещиваются.

$k = 4$ и пересечение пусто. Тогда $\dim P \cap Q = 1$. Плоскости скрещиваются параллельно прямой.

$k = 4$ и пересечение не пусто. Тогда $P \cap Q = 0$. Плоскости пересекаются в точке.

$k = 3$ и пересечение пусто, $P = Q$. Плоскости параллельны.

$k = 3$ и пересечение не пусто, $\dim P \cap Q = 1$. Плоскости пересекаются по прямой.

$k = 2$. Плоскости совпадают.

964. 1) $k = m_1 + m_2 + 1$; многообразия скрещиваются.

2) $k = m_1$; $y_0 + Q$ содержится в $x_0 + P$.

3) $1 + m_1 \leqslant k \leqslant m_1 + m_2$. Здесь две возможности. Если пересечение пусто — многообразия скрещиваются параллельно подпространству размерности $m_1 + m_2 - k + 1$. Если же пересечение не пусто, то оно имеет размерность $m_1 + m_2 - k$. Имеется всего $2m_2 + 2$ возможностей.

965. $x_1 + P$, где P — подпространство, натянутое на векторы $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$. Иными словами, оно составлено из линейных комбинаций $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$, причем $c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 1$.

966. a) $\ker A = 0$; b) базис ядра: $(-1, 3, 5)^{\mathsf{T}}$; c) базис ядра: $(1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$; d) базис ядра: $(17, -5, 2, 9)^{\mathsf{T}}$; e) $\ker A = 0$; f) базис ядра: $(1, 3, 1, 0)^{\mathsf{T}}$ и $(-3, -5, 0, 1)^{\mathsf{T}}$.

967. В примерах a) и d) образом является все пространство T, в примерах b), c), f), g) за базис образа можно взять два первых столбца матрицы A, в примере e) — все столбцы.

968. В качестве матрицы D можно взять матрицу, последние $n-r$ столбцов которой составляют базис ядра, первые — произвольное дополнение до базиса пространства S. Первые столбцы матрицы C — образы первых столбцов матрицы D, остальные — произвольно дополняют их до базиса пространства T. Можно получить матрицы D и C^{-1} как произведения матриц элементарных преобразований, переводящих матрицу A в матрицу $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Не приводим численных ответов из-за их неоднозначности.

969. Дополним базис $\ker A$ до базиса S. Образы дополняющих векторов линейно независимы и составляют базис AS.

971. В качестве R можно взять AS. Отображение S на AS эпиморфно, естественное вложение AS в T мономорфно.

972. Любая $m\times n$-матрица ранга r есть произведение $m\times r$-матрицы ранга r на $r\times n$-матрицу ранга r.

973. a) $A=A\cdot E$; b) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 8/5 \end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $A=E\cdot A$; e) $A=A\cdot E$;

f) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

g) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (ответы не однозначны).

974. $P\cap Q$ есть ядро A на P.

975. $\dim AP\leqslant\dim AT=r$; $\dim AP=\dim P-\dim(P\cap\ker A)\leqslant p$; $\dim(P\cap\ker A)\leqslant\dim\ker A=m-r$. Из этих трех неравенств следует $p+r-m\leqslant\dim AP\leqslant\min(p, r)$.

977. $P\subset Q+\ker A$, $Q\subset P+\ker A$.

978. Положим $Q=P\oplus R$. Тогда $AQ=AP+AR$ и $\dim AQ\leqslant\dim AP+$ $+\dim AR\leqslant\dim AP+\dim R=\dim AP+\dim Q-\dim P$.

979. Необходимое и достаточное условие: $BU\subset CS$.

980. Необходимое и достаточное условие: $\ker A\subset\ker C$.

981. Необходимое и достаточное условие: $BU\subset CS$ и $\ker A\subset\ker C$ (сравнить с задачей 463).

982. a) q^{mn}; b) $q^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{\psi_m(q)}{\psi_{m-n}(q)}$ (при $m\geqslant n$);

c) $q^{\frac{m(m-1)}{2}}\dfrac{\psi_n(q)}{\psi_{n-m}(q)}$ (при $m \leqslant n$);

d) $q^{\frac{r(r-1)}{2}}\dfrac{\psi_n(q)\,\psi_m(q)}{\psi_{n-r}(q)\,\psi_{m-r}(q)\,\psi_r(q)}$ $\quad (\psi_k(q)=(q-1)\ldots(q^k-1))$.

983. $\ker A=Q$; $AS=P$; $A^2z=A(Az)=Ax=x=Az$ при любом $z\in S$.

985. AB — единичный оператор на T, BA — оператор проектирования S на P параллельно $\ker A$, $ABA=A$, $BAB=B$.

986. BA — единичный оператор на S, AB — оператор проектирования T на AS параллельно Q, $ABA=A$, $BAB=B$.

987. BA — оператор проектирования S на P параллельно $\ker A$, AB — оператор проектирования T на AS параллельно Q, $ABA=A$, $BAB=B$.

989. Пусть, в обозначениях задачи 981, $U=T$, $V=S$, $C=B=A$. Тогда уравнение $AXA=A$ всегда разрешимо и $X_1=XAX$ есть полуобратное отображение для A.

990. Необходимое и достаточное условие существования $A^{(-1)}$: $\ker A\cap AS=0$. При выполнении этого условия $A^{(-1)}$ есть полуобратный оператор при $P=AS$, $Q=\ker A$. Отсюда следует единственность $A^{(-1)}$ и соотношение $(A^{(-1)})^{(-1)}=A$.

991. Пусть B^- и C^- — полуобратные для B и C. Тогда B^-B и CC^- равны единичным матрицам. Поэтому $BC(C^-B^-)BC=BC$ и $C^-B^-BCC^-B^-=C^-B^-$.

992. Константы принадлежат и к ядру и к образу. Поэтому $D^{(-1)}$ не существует. В качестве полуобратного можно взять оператор интегрирования $t^k\to\dfrac{1}{k+1}t^{k+1}$, $0\leqslant k\leqslant n-2$, с дополнительным соглашением $t^{n-1}\to 0$ (ответ не однозначен).

993. $D^{(-1)}$ есть оператор интегрирования с дополнительным соглашением $D^{(-1)}c=0$ (c — константа).

994. $n(m-r)$.

995. $r_1+r_2+\ldots+r_m$, где r_k — ранг матрицы, составленной из первых k столбцов матрицы A.

996. $\dim P_1=\dim Q_1$, $\dim P_2=\dim Q_2$, $\dim P_1\cap P_2=\dim Q_1\cap Q_2$.

997. $k=l$ и совпадение размерностей P_i и Q_i, $i=1,\ldots,k$.

998. Легко видеть, что $b_{ij}=d_{ij}-d_{i-1,\,j}-d_{i,\,j-1}+d_{i-1,\,j-1}$, где $d_{ij}=\dim P_i\cap Q_j$. Через B_{ij} обозначим систему векторов, которую нужно присоединить к базису $(P_i\cap Q_{j-1})+(P_{i-1}\cap Q_i)$, чтобы получить базис $P_i\cap Q_j$. Число векторов B_{ij} равно b_{ij}. По индукции доказывается, что $\bigcup\limits_{\substack{i\leqslant\alpha,\\ j\leqslant\beta}}B_{ij}$ составляет базис $P_\alpha\cap Q_\beta$ и, в частности, базис $P_\alpha=\bigcup\limits_{\substack{i\leqslant\alpha,\\ j\leqslant l}}B_{ij}$, базис $Q_\beta=\bigcup\limits_{\substack{i\leqslant k,\\ j\leqslant\beta}}B_{ij}$, базис $S=\bigcup\limits_{\substack{i\leqslant k,\\ j\leqslant l}}B_{ij}$. Таким

образом, из базиса, составляющего объединение всех B_{ij}, строятся по определенному закону базисы всех подпространств, составляющих флаги. Если для пар флагов F, Φ и F', Φ' матрицы (b_{ij}) и (b'_{ij}) совпадают, то найдется оператор, переводящий B_{ij} в B'_{ij} при всех i, j и он переведет пару F, Φ в пару F', Φ'.

999. Каноническая форма получается следующая:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Здесь E_i — единичные матрицы. Их порядки и составляют полную систему инвариантов.

1000. Если A вырожден, то $x_0+AS\neq S$ и F не может быть обратимым. Если A невырожден, то $F^{-1}(y)=-A^{-1}x_0+A^{-1}y$.

1002. В силу линейной независимости систем векторов $x_1-x_0, \ldots$ $\ldots, x_n-x_0$ и $y_1-y_0, \ldots, y_n-y_0$ существует линейный оператор A такой, что $A(x_i-x_0)=y_i-y_0$, $i=1, \ldots, n$. Тогда $F(x)=y_0-Ax_0+$ $+Ax$ осуществляет искомое аффинное преобразование.

1003. Пусть $L=x_0+P$, $M=y_0+Q$, $\dim P=\dim Q$. Тогда существует невырожденный оператор A такой, что $AP=Q$. Искомое преобразование: $F(x)=y_0-Ax_0+Ax$.

1004. Векторы на тройке прямых общего положения линейно независимы и за счет оператора их можно совместить для обеих троек. Если их (после совмещения) принять за базис, уравнения прямых примут вид:

$$L_1\colon\ y=y_1,\ z=z_1;\quad L_2\colon\ x=x_2,\ z=z_2;\quad L_3\colon\ x=x_3,\ y=y_3;$$
$$L_1'\colon\ y=y_1',\ z=z_1';\quad L_2'\colon\ x=x_2',\ z=z_2';\quad L_3'\colon\ x=x_3',\ y=y_3'.$$

При этом $x_3\neq x_2$, $y_1\neq y_3$, $z_1\neq z_2$, $x_3'\neq x_2'$, $y_1'\neq y_3'$, $z_1'\neq z_2'$. Но еще остается возможность сделать аффинное преобразование, не меняющее направлений прямых: $x=a_1x''+b_1$; $y=a_2y''+b_2$; $z=a_3z''+b_3$, причем $a_1a_2a_3\neq 0$. Это преобразование и позволяет перевести L_1 в L_1', L_2 в L_2' и L_3 в L_3'.

1008. Характеристический полином равен минимальному аннулятору вектора x.

1011. $\frac{f_1 f_2}{f_3}$, где f_1, f_2 и f_3 — характеристические полиномы на P_1, P_2 и $P_1 \cap P_2$.

1016. Следуя указанию, получим $x = f_1(A) g_1(A) x + f_2(A) g_2(A) x$. Первое слагаемое x_2 аннулируется оператором $g_2(A)$, второе x_1 — оператором $g_1(A)$. Однозначность следует из того, что если $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, то $y = x_1 - x_1' = x_2' - x_2$ аннулируется полиномами f_1 и f_2 и минимальный аннулятор для y равен константе, в силу взаимной простоты f_1 и f_2. Поэтому $x_1 = x_1'$ и $x_2 = x_2'$.

1020. $\varphi^l(A) \varphi^{m-l}(A) Q = \varphi^m(A) Q = 0$. Поэтому, $\varphi^{m-l}(A) Q \subset \ker \varphi^l(A)$. Пусть $z \in \ker \varphi^l(A)$. Имеем, $z = f(A) z_0$, где z_0 — вектор, порождающий Q. Из $\varphi^l(A) F(A) z_0 = 0$ следует, что $F(t)$ делится на $\varphi^{m-l}(t)$, откуда $\ker \varphi^l(A) \subset \varphi^{m-l}(A) Q$.

1022. $\begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ H & F & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \; H & F \end{pmatrix}$, где $F = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & -a_k \\ 1 & \dots & & -a_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$, а H — матрица, состоящая из нулей, только с одной 1 в правом верхнем углу.

1023. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \; 1 & \lambda \end{pmatrix}$ (канонический жорданов блок).

1026. Для $k = 2$: пусть f_1 и f_2 — минимальные аннуляторы x_1 и x_2 и f — аннулятор их суммы. Тогда $f_1 f_2$ делится на f. Далее, $f(A) x_1 + f(A) x_2 = 0$. Применив $f_2(A)$, получим $f_2(A) f(A) x_1 = 0$, откуда полином $f_2(t) f(t)$ делится на $f_1(t)$ и, следовательно, $f(t)$ делится на $f_1(t)$; аналогично, $f(t)$ делится на $f_2(t)$ и, следовательно, $f(t) = f_1(t) f_2(t)$. Дальше — индукция.

1028. Любой вектор из S есть $z = F(A) x_0$, где F — некоторый полином. Если $f_1(A) z = 0$, то $f_1(t) F(t)$ делится на $f_2(t)$, откуда $F(t)$ делится на $f_2(t)$, так что $z \in f_2(A) S$ и $\ker f_1(A) \subset f_2(A) S$. Обратное включение тривиально.

1030. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — система образующих предыдущей задачи, $\varphi(t)$ — неприводимый множитель $f_k(t)$, $z_1, \dots, z_l$ — какая-либо другая система образующих. Рассмотрим $S_1 = S/\varphi(A) S$. Это — прямая сумма k циклических подпространств с аннуляторами $\varphi(t)$ и характеристический полином на S_1 равен $\varphi^k(t)$. Образы $z_1, \dots, z_l$ в S_1 являются образующими с аннуляторами $\varphi(t)$ или 1. Поэтому $k \leqslant l$.

1032. a) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = c(1, -1)^\top$; $\lambda_2 = 3$, $X_2 = c(1, 1)^\top$;

b) $\lambda_1 = 7$, $X_1 = c(1, 1)^\top$; $\lambda_2 = -2$, $X_2 = c(4, -5)^\top$;

c) $\lambda_1 = ai$, $X_1 = c(1, i)^\top$; $\lambda_2 = -ai$, $X_2 = c(1, -i)^\top$;

d) $\lambda_1 = 2$, $X_1 = c_1(1, 1, 0, 0)^\top + c_2(1, 0, 1, 0)^\top + c_3(1, 0, 0, 1)^\top$;
$\lambda_2 = -2$, $X_2 = c(1, -1, -1, -1)^\top$;

e) $\lambda = 2$, $X = c_1(-2, 1, 0)^\top + c_2(1, 0, 1)^\top$;

f) $\lambda = -1$, $X = c(1, 1, -1)^\top$;

g) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = c_1(1, 0, 1)^\top + c_2(0, 1, 0)^\top$; $\lambda_2 = -1$, $X_2 = c(1, 0, -1)^\top$;

h) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = c(3, -1, 2)^\top$; $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-14}$,
$X_{2,3} = c(3 \pm 2\sqrt{-14}, 13, 2 \mp 3\sqrt{-14})^\top$;

i) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = c(3, -6, 20)^\top$; $\lambda_2 = -2$, $X_2 = c(0, 0, 1)^\top$;

j) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = c(1, 1, 1)^\top$; $\lambda_2 = \varepsilon$, $X_2 = c(3 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon; 3 + 3\varepsilon)^\top$;
$\lambda_3 = \varepsilon^2$, $X_3 = c(3 + 2\varepsilon^2, 2 + 3\varepsilon^2, 3 + 3\varepsilon^2)^\top$,

где $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$;

k) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1}$, $X_k = (1, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_k^{n-1})^\top$,

где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$.

1033. a) $\lambda_k = 2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $\lambda_k = 2i\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$.

1034. $\lambda_k = 2\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$.

1035. Положим $\dfrac{x}{y} = \alpha^n$. Тогда

$$\lambda_k = y\,\frac{\alpha\varepsilon_k - \alpha^n}{1 - \alpha\varepsilon_k},$$

где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

1036. Нуль кратности $n-1$ и $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$. Собственные векторы: любые линейно независимые векторы на гиперплоскости $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \ldots + \beta_nx_n = 0$. Если $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n \neq 0$, то имеется еще собственный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^\top$, соответствующий ненулевому собственному значению.

1037. Характеристические числа матрицы A^2 равны квадратам характеристических чисел для A. Действительно, пусть

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda).$$

Тогда

$$\det(A + \lambda E) = (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\ldots(\lambda_n + \lambda).$$

Перемножив эти равенства и заменив λ^2 на λ, получим

$$\det(A^2 - \lambda E) = (\lambda_1^2 - \lambda)(\lambda_2^2 - \lambda)\ldots(\lambda_n^2 - \lambda).$$

1038. Пусть X есть собственный вектор матрицы A, соответствующий характеристическому числу λ. Тогда $f(A)X = f(\lambda)X$, т. е.

X есть собственный вектор $f(A)$, соответствующий характеристическому числу $f(\lambda)$.

1039. $f(A)=b_0(A-\xi_1E)\ldots(A-\xi_mE)$, следовательно,

$$\det f(A)=b_0^n\det(A-\xi_1E)\ldots\det(A-\xi_mE)=b_0^nF(\xi_1)\ldots F(\xi_m),$$

т. е. равен результанту f и F.

1040. Пусть $F(\lambda)=\det(A-\lambda E)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$ и $f(x)=b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$. Тогда

$$\det f(A)=b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\lambda_i-\xi_k)=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n).$$

1041. Положим $\varphi(x)=f(x)-\lambda$ и применим результат предыдущей задачи. Получим $\det(f(A)-\lambda E)=(f(\lambda_1)-\lambda)\ldots(f(\lambda_n)-\lambda)$, откуда следует, что характеристическими числами матрицы $f(A)$ являются $f(\lambda_1),\ \ldots,\ f(\lambda_n)$.

1042. $a_1+a_2+\ldots+a_n$, $a_1-a_2+\ldots+a_{n-1}-a_n$ (только при четном n), $\pm|a_1+a_2\varepsilon_k+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}|$, где $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $0<k<\dfrac{n}{2}$.

1043. Собственные значения для A^2 равны n и $-n$ с кратностями, соответственно, $\dfrac{n+1}{2}$ и $\dfrac{n-1}{2}$. Следовательно, собственными значениями для A являются $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$. Пусть a, b, c, d — их кратности. Тогда $a+b=\dfrac{n+1}{2}$, $c+d=\dfrac{n-1}{2}$. Сумма их $[(a-b)+(c-d)i]\sqrt{n}$ равна $1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}$. Модуль правой части (задача 207) равен $\sqrt{n}$. Следовательно, $(a-b)^2+(c-d)^2=1$. Если $n=4k+1$, то $c=d=k$; $a=k+1$, $b=k$ или $a=k$, $b=k+1$. Если же $n=4k+3$, то $a=b=k+1$; $c=k+1$, $d=k$ или $c=k$, $d=k+1$. Произведение собственных значений равно определителю. Из результата задачи 381 получим, что при $n=4k+1$ будет $a=k+1$, $b=k$, а при $n=4k+3$ будет $c=k+1$, $d=k$.

1044. $1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+\sqrt{n}$ при $n=4k+1$,

$$1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+i\sqrt{n}\text{ при } n=4k+3.$$

1045. Если поставленное условие не выполнено, найдется показатель $l\geqslant 1$ такой, что $A^l\psi(A)\neq 0$ и $A^{l+1}\psi(A)=0$. Тогда $A^l\psi(A)S\neq 0$ и это подпространство входит в ядро и образ A. Тем самым условие необходимо. Если оно выполнено, то $J=-a_{n-k}^{-1}(A^{n-k}+\ldots+a_{n-k-1}A)$ обладает свойством $AJ=JA=A$, $J^2=J$ и $A^{(-1)}=-a_{n-k}^{-1}(A^{n-k-1}+\ldots+a_{n-k-2}A+a_{n-k-1}J)$, что легко проверяется.

1046. Собственные значения равны ki, $k=-n, \ldots, 0, \ldots, n$; собственные векторы равны $e^{kit}=\cos kt+i\sin kt$.

1047.

	Каноническая форма	Преобразующая матрица
a)	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
b)	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
c)	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;
d)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;
e)	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;
f)	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;
g)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;
h)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;
i)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;
j)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;
k)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;
l)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} -2 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

n) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1048. a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right)$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \varepsilon & & & & \\ & & \varepsilon^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$,

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1049. Собственное значение $\lambda = 1$. Канонические блоки порядков 1, 2, 3.

1050. Собственное значение $\lambda = 1$. Канонические блоки порядков 1, 3, 5.

1051. Нетривиальный жорданов блок не может быть периодическим.

1052. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Канонический базис, например:

$\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, \frac{x}{1}, 1.$

1053. Порядки блоков: $n, n-1, \dots, 1$. Образующие циклических подпространств: x^{n-1}; $x^{n-2}(x-y), \dots, (x-y)^{n-1}$.

1054. Порядки блоков: $n+m-1, n+m-3, \dots, n-m+1$. Образующие циклических подпространств:

$$x^{n-1}y^{m-1}, (x-y)x^{n-2}y^{m-2}, \dots, (x-y)^{m-1}x^{n-m}.$$

1055. Пусть $Bx_0=\varphi(A)x_0$. Для любого $x\in S$, $x=f(A)x_0$, будет $(B-\varphi(A))x=(B-\varphi(A))f(A)x_0=f(A)(B-\varphi(A))x_0=0$, так что $B=\varphi(A)$.

1056. Пусть $M=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}$. Сравнение элементов матриц $A^\top M$ и MA во всех позициях, кроме последней строки и последнего столбца, приводит к равенствам элементов, лежащих на параллелях ко второй диагонали, так что матрица M должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1}\end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы последней строки, а также последнего столбца матриц $A^\top M$ и MA, получим одно тождество и дважды повторенные равенства $c_{n+1}+a_1c_n+\dots+a_nc_1=0$, $c_{n+2}+a_1c_{n+1}+\dots+a_nc_2=0$, $\dots$, $c_{2n-1}+a_1c_{2n-2}+\dots+a_nc_{n-1}=0$. Задавшись произвольными значениями для $c_1, \dots, c_n$, найдем $c_{n+1}, \dots, c_{2n-1}$. В частности, можно взять $c_1=\dots=c_{n-1}=0$, $c_n=1$. Тогда M невырождена.

1057. Найдем (задача 1056) невырожденную симметрическую матрицу B_2 так, что $A^\top=B_2AB_2^{-1}$. Тогда $(AB_2^{-1})^\top=B_2^{-1}A^\top=AB_2^{-1}$, т. е. матрица $B_1=AB_2^{-1}$ симметрическая, $A=B_1B_2$.

1058. Пусть $C^\top B_1C=\Lambda_1$, $C^\top B_2C=\Lambda_2$, где Λ_1 и Λ_2 — вещественные диагональные матрицы. Тогда $C^{-1}B_2^{-1}B_1C=\Lambda_2^{-1}\Lambda_1$ диагональна и вещественна. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $C^{-1}B_2^{-1}B_1C=\Lambda$ диагональна и вещественна. Тогда $A_1=A_2\Lambda$, где $A_1=C^\top B_1C$, $A_2=C^\top B_2C$. Из $A_1=A_1^\top$, $A_2=A_2^\top$, $\Lambda=\Lambda^\top$ следует, что $A_2\Lambda=\Lambda A_2$. Следовательно, A_2 квазидиагональна и составлена из блоков, отличающихся численными множителями от блоков, составляющих A_1. Поэтому формы с матрицами A_1 и A_2, а с ними и исходные, могут быть приведены к каноническому виду одновременным преобразованием.

1059. Существует C такая, что $B_2=CC^\top$. Тогда $C^\top A(C^\top)^{-1}=C^\top B_1C$ — симметрическая матрица.

1060. Если пространство S не циклично, то найдется собственное значение, для которого существует система из двух или больше линейно независимых собственных векторов и число одномерных инвариантных подпространств бесконечно. Если S циклично с образующим x_0 и P инвариантно, выберем в P вектор $x_1=\varphi(A)x_0$ так, чтобы степень $\varphi(t)$ была минимальна. Пусть $x_2=F(A)x_0\in P$ и $r(t)$ — остаток от деления $F(t)$ на $\varphi(t)$. Тогда $x_3=r(A)x_0=F(A)x_0-q(A)\varphi(A)x_0=x_2-$

$-q(A)x_1 \in P$ и, следовательно, $r(t)=0$. В частности, характеристический полином $f(t)$ делится на $\varphi(t)$, ибо $0=f(A)x_0 \in P$. Итак, P циклично и порождается вектором $\varphi(A)x_0$, где $\varphi(t)$ — делитель $f(t)$. Число делителей $f(t)$ конечно.

1061. $F(u)=(1+u+\ldots+u^{m_1})\ldots(1+u+\ldots+u^{m_k})$.

1062. Достаточно доказать существование P_{n-1}. Пусть $\varphi(t)=$ $=(t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_k)^{m_k}$ — минимальный полином для A, $\psi(t)=$ $=\frac{1}{t-\lambda_1}\varphi(t)$. Положим $Q=\ker\psi(A)$. Для любого $x \in S$ будет: $Ax=$ $=\lambda_1 x+y$, $y \in Q$. Поэтому, любое подпространство, содержащее Q, инвариантно. Среди них можно выбрать P_{n-1}.

1063. Верхняя треугольная матрица.

1065. Если минимальный аннулятор вектора $x \in P_1$ относительно оператора A_1 имеет нетривиальное разложение $f_1 f_2$, то $\ker f_1(A_1)$ отлично от 0 и P и инвариантно (в силу коммутирования) для всех $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Если φ_1, φ_2 неприводимы, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и существуют ненулевые векторы $x_1, x_2 \in P$ такие, что $\varphi_1(A_1)x_1=0$ и $\varphi_2(A_1)x_2=0$, то минимальный аннулятор вектора x_1+x_2 равен $\varphi_1\varphi_2$.

1066. $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1067. Таким базисом будет x_0, $\frac{1}{b}(Ax_0-ax_0)$, где $x_0 \in S$, $x_0 \neq 0$.

1068. Любой вектор $x_0 \neq 0$ из неприводимого инвариантного подпространства аннулируется многочленом первой степени, т. е. является собственным вектором для всех операторов. Тем самым и само неприводимое инвариантное подпространство одномерно.

1069. Если для общего собственного вектора $z_0 \in \tilde{S}$ собственные значения всех операторов вещественны, то можно взять $z_0 \in S$ (например, действительную или мнимую часть z_0). Если хотя бы одно из них комплексное, то $z_0=x_0+iy_0$, $x_0, y_0 \in S$, $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. Пусть $\lambda_k=$ $=a_k-ib_k$ — собственное значение оператора A_k. Тогда $A_k x_0=a_k x_0+$ $+b_k y_0$, $A_k y_0=-b_k x_0+a_k y_0$.

1071. Каноническая матрица есть квазидиагональная матрица, составленная из канонических форм верхних левых субматриц A_k матрицы A, $k=1, \ldots, n$.

1072. $\alpha_i\beta_j$, где α_i — собственные значения A, β_j — собственные значения B.

1073. Собственные значения равны $\alpha_i+\beta_j$, где α_i — собственные значения A, β_j — собственные значения B.

1074. Собственные значения $A^{[m]}$ равны $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_m}$, где $0<i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant n$.

1075. $\alpha_i+\alpha_j$, $i<j$.

1076. a) 9; b) 0. **1077.** a) 90°; b) 45°; c) $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{77}}$.

1078. $\cos A = \frac{5}{\sqrt{39}}$, $\cos B = \frac{8}{\sqrt{78}}$, $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1079. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}$. **1080.** $\sqrt{n}$.

1081. При нечетном n ортогональных диагоналей нет. При $n = 2m$ число диагоналей, ортогональных к данной, равно C_{2m-1}^{m-1}.

1082. Координаты точек даются строчками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \sqrt{\frac{4}{6}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}} & \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \end{pmatrix}.$$

1083. $R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. Координаты центра:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)n}}\right).$$

1084. $\left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

1085. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

1086. За остальные два вектора можно взять, например, $\frac{1}{\sqrt{26}}(0, -4, 3, 1)$ и $\frac{1}{3\sqrt{26}}(-13, 5, 6, 2)$.

1087. (1, 2, 1, 3), (10, —1, 1, —3), (19, —87, —61, 72).

1088. Например, $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -4 & -2 \\ 39 & -37 & 51 & -29 & 5 \end{pmatrix}$.

1089. Система интерпретируется как задача об отыскании векторов, ортогональных к системе векторов, изображающих коэффициенты уравнений. Множество искомых векторов есть пространство, ортогонально дополнительное к пространству, порожденному данными векторами. Фундаментальная система решений есть базис пространства искомых векторов.

1090. Например, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 12, 8, 17)$.

1091. a) $X' = (3,\ 1,\ -1,\ -2) \in P$, b) $X' = (1,\ 7,\ 3,\ 3) \in P$,
$X'' = (2,\ 1,\ -1,\ 4) \perp P$; $X'' = (-4,\ -2,\ 6,\ 0) \perp P$.

1092. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независимы, P — натянутое на них пространство. Далее, пусть $X = Y + Z$, $Y \in P$, $Z \perp P$.

Положим

$$Y = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_m A_m.$$

Составим систему уравнений для определения $c_1, c_2, \ldots, c_m$, умножив скалярно последнее равенство на A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и принимая во внимание, что $(Y, A_i) = (X, A_i)$.

Получим

$$\begin{aligned}
&c_1 (A_1, A_1) + c_2 (A_1, A_2) + \ldots + c_m (A_1, A_m) = (A_1, X),\\
&c_1 (A_2, A_1) + c_2 (A_2, A_2) + \ldots + c_m (A_2, A_m) = (A_2, X),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1 (A_m, A_1) + c_2 (A_m, A_2) + \ldots + c_m (A_m, A_m) = (A_m, X).
\end{aligned}$$

В силу линейной независимости $A_1, A_2, \ldots, A_m$, определитель Δ этой системы отличен от 0.

Найдем $c_1, c_2, \ldots, c_m$ и подставим их в выражение для Y. Получим

$$Y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_m \\ (A_1, X) & (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \ldots & (A_1, A_m) \\ (A_2, X) & (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \ldots & (A_2, A_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A_m, X) & (A_m, A_1) & (A_m, A_2) & \ldots & (A_m, A_m) \end{vmatrix}$$

и

$$Z = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ (A_1, X) & (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \ldots & (A_1, A_m) \\ (A_2, X) & (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \ldots & (A_2, A_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A_m, X) & (A_m, A_1) & (A_m, A_2) & \ldots & (A_m, A_m) \end{vmatrix}.$$

Эти равенства следует понимать в том смысле, что векторы Y и Z являются линейными комбинациями векторов, находящихся в первой строчке с коэффициентами, равными соответствующим алгебраическим дополнениям.

Отсюда получаем, наконец, что

$$(Y, Y) = (Y, X - Z) = (Y, X) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -(X, A_1) & -(X, A_2) & \ldots & -(X, A_m) \\ (A_1, X) & (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \ldots & (A_1, A_m) \\ (A_2, X) & (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \ldots & (A_2, A_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A_m, X) & (A_m, A_1) & (A_m, A_2) & \ldots & (A_m, A_m) \end{vmatrix}$$

и

$$(Z, Z) = (X - Y, Z) = (X, Z) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (X, X) & (X, A_1) & (X, A_2) & \dots & (X, A_m) \\ (A_1, X) & (A_1, A_1) & (A_1, A_2) & \dots & (A_1, A_m) \\ (A_2, X) & (A_2, A_1) & (A_2, A_2) & \dots & (A_2, A_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_m, X) & (A_m, A_1) & (A_m, A_2) & \dots & (A_m, A_m) \end{vmatrix}.$$

1093. Пусть Y — какой-либо вектор пространства P, а X'' — ортогональная проекция вектора X на P.

Тогда

$$\cos(X, Y) = \frac{(X, Y)}{|X| \cdot |Y|} = \frac{(X'', Y)}{|X| \cdot |Y|} = \frac{|X'| \cdot |Y| \cdot \cos(X'', Y)}{|X| \cdot |Y|} =$$

$$= \frac{|X''|}{|X|} \cos(X'', Y),$$

откуда следует, что наибольшее значение $\cos(X, Y)$ достигается для тех Y, для которых $\cos(X', Y) = 1$, т. е. для $Y = \alpha X'$ при $\alpha > 0$.

1094. a) $45°$; b) $90°$.

1095. $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

1096. $|X - Y|^2 = |(X - X'') + (X'' - Y)|^2 = |X - X'|^2 + |X'' - Y|^2 \geqslant \geqslant |X - X''|^2$, причем равенство возможно только при $Y = X''$.

1097. a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1098. Искомое кратчайшее расстояние равно кратчайшему расстоянию от точки $X_0 - Y_0$ до пространства $P + Q$.

1099. Пусть одна из вершин лежит в начале координат и пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — векторы, исходящие из начала в остальные вершины. Легко видеть, что $|X_i|^2 = 1$, $(X_i, X_j) = \frac{1}{2}$. Многообразие, проходящее через первые $m + 1$ вершин, есть пространство $t_1 X_1 + \dots + t_m X_m$. Многообразие, проходящее через остальные $n - m$ вершин, есть $X_n + t_{m+1}(X_{m+1} - X_n) + \dots + t_{n-1}(X_{n-1} - X_n)$. Искомое кратчайшее расстояние есть расстояние от X_n до пространства P, порожденного векторами $X_1, X_2, \dots, X_m, X_n - X_{m+1}, \dots, X_n - X_{n-1}$.

Пусть

$$X_n = t_1 X_1 + \dots + t_m X_m + t_{m+1}(X_n - X_{m+1}) + \dots$$
$$\dots + t_{n-1}(X_n - X_{n-1}) + Y,$$

где $Y \perp P$. Составляя скалярное произведение X_n с $X_1, \dots, X_m, X_n - X_{m+1}, \dots, X_n - X_{n-1}$, получим для определения $t_1, \dots, t_{n-1}$

систему уравнений

$$t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2}, \qquad t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}t_1+t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}t_{m+1}+t_{m+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+t_m=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\ldots+t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

откуда $t_1=t_2=\ldots=t_m=\dfrac{1}{m+1}$, $t_{m+1}=t_{m+2}=\ldots=t_{n-1}=\dfrac{1}{n-m}$.

Следовательно,

$$Y=\frac{X_{m+1}+X_{m+2}+\ldots+X_n}{n-m}-\frac{X_1+X_2+\ldots+X_m}{m+1}.$$

Таким образом, общим перпендикуляром является вектор, соединяющий центры выбранных граней. Кратчайшее расстояние равно длине этого вектора

$$|Y|=\sqrt{\frac{n+1}{2(n-m)(m+1)}}.$$

1100. a) Проекция вектора $(t_1+2t_2,\ t_1-2t_2,\ t_1+5t_2,\ t_1+2t_2)$ на первую плоскость есть $(t_1+2t_2,\ t_1-2t_2,\ 0,\ 0)$. Следовательно, $\cos^2\varphi=\dfrac{2t_1^2+8t_2^2}{4t_1^2+14t_1t_2+37t_2^2}=\dfrac{2\lambda^2+8}{4\lambda^2+14\lambda+37}$, где $\lambda=\dfrac{t_1}{t_2}$. Это выражение достигает максимума, равного 8/9, при $\lambda=-4$.

b) Угол между любым вектором второй плоскости с его ортогональной проекцией на первую плоскость остается неизменным и равен $\pi/4$.

1101. Куб есть множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $-\dfrac{a}{2}\leqslant x_i\leqslant\dfrac{a}{2}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Здесь a есть длина ребра куба. Перейдем к новым осям, приняв за координатные векторы $e_1'=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $e_2'=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $e_3'=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ и $e_4'=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Эти векторы ортогонально нормированы, и их направления совпадают с направлениями некоторых диагоналей куба. Координаты точек куба в этих осях удовлетворяют неравенствам

$$-a\leqslant x_1'+x_2'+x_3'+x_4'\leqslant a, \quad -a\leqslant x_1'+x_2'-x_3'-x_4'\leqslant a,$$
$$-a\leqslant x_1'-x_2'+x_3'-x_4'\leqslant a, \quad -a\leqslant x_1'-x_2'-x_3'+x_4'\leqslant a.$$

Интересующее нас пересечение получим, положив $x_1'=0$. Оно представляет собой тело, расположенное в пространстве, натянутом на e_2', e_3', e_4', и координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $\pm x_2' \pm x_3' \pm x_4' \leqslant a$.

Это есть правильный октаэдр, ограниченный плоскостями, отсекающими на осях отрезки длины a.

1102. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_m] = \begin{vmatrix} (B_1, B_1) & (B_1, B_2) & \ldots & (B_1, B_m) \\ (B_2, B_1) & (B_2, B_2) & \ldots & (B_2, B_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (B_m, B_1) & (B_m, B_2) & \ldots & (B_m, B_m) \end{vmatrix}.$$

Эта формула легко устанавливается по индукции, если принять во внимание результат задачи 1092. Из формулы непосредственно следует, что объем не зависит от нумерации вершин и что

$$V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

Пусть теперь $B_1 = B_1' + B_1''$, C_1, C_1', C_1'' — ортогональные проекции векторов B_1, B_1' и B_1'' на пространство, ортогонально дополнительное к $(B_2, \ldots, B_m)$. Очевидно, что $C_1 = C_1' + C_1''$. По определению, $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] = |C_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1', B_2, \ldots, B_m] = |C_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1'', B_2, \ldots, B_m] = |C_1''| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$. Так как $|C_1| \leqslant |C_1'| + |C_1''|$, то $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$. Знак равенства возможен только в случае, если C_1' и C_1'' коллинеарны и одинаково направлены, что, в свою очередь, имеет место в том и только в том случае, если B_1', B_1'' лежат в пространстве, натянутом на $B_1, B_2, \ldots, B_m$, и коэффициенты при B_1 в выражениях B_1', B_1'' через $B_1, B_2, \ldots, B_m$ имеют одинаковые знаки, т.е. B_1', B_1'' лежат «по одну сторону» от пространства $(B_2, \ldots, B_m)$ в пространстве $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$.

1103. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_n] = \begin{vmatrix} (B_1, B_1) & (B_1, B_2) & \ldots & (B_1, B_n) \\ (B_2, B_1) & (B_2, B_2) & \ldots & (B_2, B_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (B_n, B_1) & (B_n, B_2) & \ldots & (B_n, B_n) \end{vmatrix} = (\det B)^2,$$

где B — матрица, столбцами которой являются координаты векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

1104. Непосредственно из определения получаются еще следующие два свойства объема:

d) $V[B_1+X, B_2, \ldots, B_m]=V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$ при любом X, принадлежащем пространству $(B_2, \ldots, B_m)$,
ибо точки B_1, B_1+X имеют одинаковые расстояния от $(B_2, \ldots, B_m)$.

e) $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant |B_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$.

Это следует из того, что «высота», т. е. длина ортогональной к $(B_2, \ldots, B_m)$ составляющей вектора B_1, не превосходит длины самого вектора B_1.

Пусть теперь $C_1, C_2, \ldots, C_m$ суть ортогональные проекции векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$ на пространство P. Предположим, что неравенство $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$ уже доказано. Обозначим через B_1' ортогональную к $(B_2, \ldots, B_m)$ составляющую вектора B_1, через C_1' — ее проекцию на P. Ввиду того, что $B_1'-B_1 \in (B_2, \ldots, B_m)$, заключаем, что $C_1'-C \in (C_2, \ldots, C_m)$ и, следовательно, будет

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m]=V[C_1', C_2, \ldots, C_m] \leqslant |C_1'| \cdot V[C_2, \ldots, C_m].$$

Но очевидно, что $|C_1'| \leqslant |B_1'|$ и, по индукционному предположению, $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Следовательно,

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] \leqslant |B_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]=V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

База для индукции имеется, ибо для одномерных параллелепипедов теорема очевидна.

1105. Из формулы для вычисления квадрата объема следует, что $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]=V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$, если каждый вектор A_i ортогонален к каждому вектору B_j. В общем случае заменим векторы $B_1, \ldots, B_k$ их проекциями $C_1, \ldots, C_k$ на пространство, ортогонально дополнительное к $(A_1, \ldots, A_m)$. В силу результата предыдущей задачи, $V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[B_1, \ldots, B_k]$, откуда

$$V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]=V[A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_k]=$$
$$=V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k].$$

Содержание этой задачи совпадает с содержанием задачи 506.

1106. Непосредственно следует из неравенства $V[A_1, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \cdot V[A_2, \ldots, A_m]$, которое, в свою очередь, непосредственно следует из определения объема.

По своему содержанию эта задача совпадает с задачей 507.

1107. Подобное преобразование тела в n-мерном пространстве влечет за собой изменение объема, пропорциональное n-й степени коэффициента подобия. Для параллелепипеда это непосредственно следует из формулы для объема, а для всякого другого тела объем есть предел суммы объемов параллелепипедов. Следовательно, объем $V_n(R)$ n-мерного шара радиуса R равен $V_n(1) R^n$.

Для вычисления $V_n(1)$ разобьем шар системой параллельных $(n-1)$-мерных «плоскостей» и воспользуемся принципом Кавальери.

Пусть x есть расстояние секущей «плоскости» от центра. Сечение есть $(n-1)$-мерный шар радиуса $\sqrt{1-x^2}$.

Следовательно,

$$V_n(1)=2\int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2})\,dx=2V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx=$$

$$=V_{n-1}(1)\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=V_{n-1}(1)\,B\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=V_{n-1}(1)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Отсюда следует, что $V_n(1)=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

1108. $\dfrac{n!}{(n+1)(n+2)\dots 2n\sqrt{2n+1}}$.

1109. Базисом являются полиномы $1, x, \dots, x^n$. Квадрат объема соответствующего параллелепипеда равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}=\frac{[1!\,2!\,\dots\,n!]^3}{(n+1)!\,(n+2)!\,\dots\,(2n+1)!}.$$

1111. $2\left(\sin x-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}\right)$.

1112. $D^*=-D$.

1113. Пусть $g_{ij}=(e_i,\ e_j)$, $G=(g_{ij})$. Матрица сопряженного оператора равна $G^{-1}A^*\overline{G}$, где A — матрица исходного оператора.

1114. $G=\operatorname{diag}(1,\ 1!,\ 2!,\ \dots,\ n!)$.

1115. $D^*(g)=-g'+xg-a_0(g)P_{n+1}(x)$. Здесь $g=a_0(g)x^n+\dots$

1116. $D^*(P_k)=P_{k+1}$ при $k<n$ и $D^*(P_n)=0$.

1117. Из $(A(x+y),\ x+y)=(B(x+y),\ x+y)$ следует, в силу самосопряженности, что $2(Ax,\ y)=2(Bx,\ y)$ при любых x и y, откуда $Ax=Bx$ при всех x, т. е. $A=B$.

1118. $|Ax|=|A^*x|$ равносильно $(AA^*x,\ x)=(A^*Ax,\ x)$, выполнение чего при всех x равносильно $AA^*=A^*A$.

1119. Если $C=(c_{ij})$, то $\operatorname{Sp} CC^*=\sum\limits_{i,\,j}|c_{ij}|^2$.

1120. $AA^* = \begin{pmatrix} BB^*+CC^* & CD^* \\ DC^* & DD^* \end{pmatrix}$, $A^*A = \begin{pmatrix} B^*B & B^*C \\ C^*B & C^*C+D^*D \end{pmatrix}$, $\operatorname{Sp} BB^* = \operatorname{Sp} B^*B$. Следовательно, если $AA^* = A^*A$, то $\operatorname{Sp} CC^* = 0$, откуда $C = 0$ и $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ с нормальными клетками B и D.

1121. Матрица нормального оператора в ортонормированном базисе, включающем базис инвариантного подпространства, распадается на два блока, соответствующих инвариантному подпространству и его ортогональному дополнению. Матрица сопряженного оператора имеет такой же вид.

1122. Инвариантное подпространство для нормального оператора инвариантно и для сопряженного и ограничение нормального оператора на инвариантном подпространстве нормально. Поэтому, пространство можно разбивать в прямую ортогональную сумму инвариантных подпространств до тех пор, пока не придем к одномерным подпространствам.

1123. Для любой нормальной матрицы A существует унитарная матрица C такая, что $C^{-1}AC$ диагональна. Именно, в качестве C можно взять матрицу преобразования от исходного базиса к ортонормированному базису из собственных векторов.

1125. Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Тогда $(Ax_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$ и $(Ax_1, x_2) = (x_1, A^*x_2) = (x_1, \overline{\lambda}_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$. Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$.

1126. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. Собственные значения: $a \pm bi$.

1127. Доказательство ничем не отличается от доказательства в задаче 1122.

1128. Для любой вещественной нормальной матрицы A существует ортогональная матрица C такая, что $C^{-1}AC$ состоит из блоков первого и второго порядков, последние имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. В качестве C можно взять матрицу преобразования координат от исходного базиса к базису, являющемуся объединением ортонормированных базисов взаимно ортогональных неприводимых инвариантных подпространств.

1131. $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_m \end{pmatrix}$, где E_k и E_m — единичные матрицы.

1132. $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_m \end{pmatrix}$. Матрица является матрицей оператора отражения от k-мерного подпространства.

1133. Да, при четной размерности. Ее каноническая форма составлена из блоков $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (повороты на 90° в инвариантных плоскостях).

1135. Взять нормированный вектор из P_1, ортогональный к нему нормированный вектор из P_2, ортогональный к P_2 нормированный вектор из P_3 и т. д. Существуют 2^n базисов, ибо каждый вектор определен с точностью до множителя ± 1.

1136. То же решение, но базисные векторы определены с точностью до комплексных множителей с модулем 1.

1137. Оператор, преобразующий ортонормированный базис первого флага в ортонормированном базисе второго, дает решение задачи.

1138. Ортонормированный базис флага из инвариантных подпространств решает задачу. Матричный эквивалент: любая матрица унитарно подобна верхней треугольной.

1139. Да. Они лишь порядком столбцов могут отличаться от матриц PL, где P — ортогональная матрица, L — квазидиагональная, составленная из единиц и блоков $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

1140. Пусть A переводит e_i в g_i, $i=1, \ldots, n$, и взяты произвольные векторы $x=\sum x_i e_i$ и $y=\sum y_i e_i$. Тогда $Ax=\sum x_i g_i$, $Ay=\sum y_i g_i$; $(Ax, Ay)=\sum x_i \overline{y_j}(g_i, g_j)=\sum x_i \overline{y_j}(e_i, e_j)=(x, y)$.

1141. Пусть P и Q подпространства, натянутые на $e_1, \ldots, e_m$ и $g_1, \ldots, g_m$, и пусть $k=\dim P \geqslant \dim Q$. Без нарушения общности можно считать, что $e_1, \ldots, e_k$ — базис P. Тогда система $g_1, \ldots, g_k$ вместе с $e_1, \ldots, e_k$ имеет ненулевой определитель Грама и потому линейно независима и образует базис Q. Координаты e_j в базисе $e_1, \ldots, e_k$ и g_j в базисе $g_1, \ldots, g_k$ совпадают, ибо совпадают скалярные произведения и базисные матрицы Грама. Поэтому достаточно ограничиться линейно независимыми системами $e_1, \ldots, e_k$ и $g_1, \ldots, g_k$. Теперь можно совместить посредством ортогонального (унитарного) оператора подпространства P и Q и применить результат предыдущей задачи.

1142. Матрица Грама для системы векторов $(u_1, \ldots, u_k, e_1, \ldots, e_m)$ и $(e_1, \ldots, e_k, v_1, \ldots, v_m)$ совпадают, ибо обе равны $\begin{pmatrix} E_k & B \\ B^* & E_m \end{pmatrix}$, где B — матрица, находящаяся в пересечении данных строк и столбцов.

1144. $U=P^{\top}\Lambda P$, где P — вещественная ортогональная матрица, Λ — унитарная диагональная, ибо A и B коммутируют и одновременно приводятся к диагональной форме посредством ортогональной матрицы.

1145. Достаточно положить $\Lambda=\Lambda_1^2$ в ответе предыдущей задачи и взять $B=\Lambda_1 P$.

1146. Следуя указанию, найдем B. Положим $V=UB^{-1}$. Она унитарна и $V^{\top}V=E$, так что $V^{\top}=V^{-1}=V^*$, откуда $V=\overline{V}$, т. е. V — ортогональная матрица.

1147. Самосопряженность следует из вещественности собственных значений идемпотентного оператора. Самосопряженный идемпотентный оператор есть оператор ортогонального проектирования на подпространство, ортогональное к ядру.

1148. Возьмем базисный вектор g_1 ортогонального дополнения к подпространству, натянутому на $e_2, \ldots, e_n$. Тогда $(g_1, e_1) \neq 0$ и $f_1 = \frac{1}{(g_1, e_1)} g_1$ удовлетворяет требованиям при $j=1$. Аналогично строятся $f_2, \ldots, f_n$. Если $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0$, то $c_i = (c_1 f_1 + \ldots \ldots + c_i f_i + \ldots + c_n f_n, e_i) = 0$. Поэтому $f_1, \ldots, f_n$ — базис.

1149. Координаты вектора x равны (x, e_i).

1150. $\overline{H}$, где $H = ((f_i, f_j)) = ((e_i, e_j))^{-1}$.

1151. Объемы взаимно обратны.

1152. Ортонормированный базис.

1153. Если $Ax = 0$, то при любом $z \in T$ $0 = (Ax, z) = (x, A^* z)$, и обратно, если при любом $z \in T$ $(x, A^* z) = 0$, то $(Ax, z) = 0$ и $Ax = 0$.

1154. Мономорфное и изометричное отображение S на некоторое подпространство AS пространства T.

1155. Ортогональное дополнение к ядру отображается изоморфно и изометрично.

1156. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — собственные векторы оператора $A^* A$, соответствующие положительным собственным значениям, $v_1, \ldots, v_k$ — их нормированные образы. Образом единичной сферы в S является эллипсоид в подпространстве пространства T, натянутом на $v_1, \ldots, v_k$. Эти векторы лежат на главных осях эллипсоида и длины полуосей равны $\mu_1, \ldots, \mu_k$.

1157. Всем поставленным требованиям удовлетворяет полуобратный оператор, построенный с помощью подпространств P и Q (задача 987), ортогональных к ядру и образу A, и только такой полуобратный оператор.