УКАЗАНИЯ

ГЛАВА I

5. $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ четное число, а $0<2-\sqrt{3}<1$.

8. Если поменять ролями оси абсцисс и ординат, то график φ превратится в график ψ.

9. См. указание к предыдущей задаче.

11. Для доказательства необходимости подсчитать, сколько имеется целых чисел, не превосходящих n, в последовательностях $[\alpha x]$ и $[\beta x]$. Для доказательства достаточности занумеровать на луче $y=(\alpha-1)x$, $x>0$ точки, у которых одна из координат целая, и подсчитать номера точек с целыми абсциссами и с целыми ординатами.

13. Установить: 1) если a_{k-1} и a_k не превосходят M, то и все последующие члены не превосходят M; 2) если $a_{k-1}\neq 0$, $a_k\neq 0$ и $a_{k-1}\neq a_k$, то $\max(a_{k+1}, a_{k+2})<\max(a_{k-1}, a_k)$; 3) если a_{k-1} и a_k делятся на натуральное число, то и все предшествующие члены на него делятся.

15. Рассмотреть разность.

17. $4(a^2+1)=(2a+3)(2a-3)+13$.

19. Применить метод индукции.

20. Применить метод индукции, используя первое утверждение предыдущей задачи.

28. Умножить числитель на $1=n-(n-1)$.

33. Подсчитать показатель, с которым данное простое число p входит в $\prod(d(M_i))^{\varepsilon_i}$, расположив элементы $z_1, \ldots, z_n$ множества M в порядке невозрастания показателей при p и подсчитать вклад от подмножеств M_i, содержащих элемент z_k и не содержащих следующие за z_k числа.

35. Рассмотреть число $N=4(p_1p_2\ldots p_m)-1$, где $p_1, \ldots, p_m$ — простые числа, и показать, что N делится по крайней мере на одно простое число вида $4n-1$.

37. Доказать, что одно из чисел a, b четное. Положив $a=2a_1$, записать уравнение в виде $\frac{c-b}{2}\cdot\frac{c+b}{2}=a_1^2$ и воспользоваться предыдущей задачей.

38. Принять во внимание, что x и y оба нечетные и $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+$ $+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=z^2$.

43. Рассмотреть сравнения $ka+l\equiv 0 \pmod d$ и $a^2+m\equiv 0 \pmod d$ и вывести из них $l^2+mk^2\equiv 0 \pmod d$.

44. Если a принадлежит примитивному классу, то $m-a$ тоже принадлежит примитивному классу.

52. Рассмотреть $4(p_1\ldots p_m)^2+1$, где $p_1, \ldots, p_m$ — простые числа, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

53. Разбить числа, кроме 1 и $p-1$, на пары взаимно обратных, что возможно, ибо если $a\not\equiv\pm 1 \pmod p$, то $a\not\equiv a^{-1} \pmod p$.

54. Следует из $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$.

55. Разбить вычеты, отличные от решений сравнения $x^2-1\equiv 0 \pmod n$ на пары взаимно обратных и воспользоваться результатом задачи 50.

60. Положить $n=a+(p-1)b$.

63. Провести индукцию для любого модуля $m=2^k m'$, $(m', 2)=1$, учитывая, что вычет $u_n \pmod m$ стабилизируется, как только стабилизируется вычет $u_{n-1} \pmod{\varphi(m')}$ и u_{n-1} станет больше k.

64. Для данного $n>0$ ввести x_0, y_0 — наименьшие неотрицательные решения сравнений $ax\equiv n \pmod b$ и $by\equiv n \pmod a$. Если $n\geqslant ab$, то $n-ax_0-by_0>-ab$ и $n-ax_0-by_0\equiv 0 \pmod{ab}$. Если $n<ab$ и n не делится ни на a, ни на b, то среди таких чисел n реализуется в виде $ax+by$ ровно половина, так как из двух чисел n и $ab-n$ реализуется одно.

66. Сначала установить, что $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]=\sum\limits_{nm\leqslant x}\mu(n)$.

67. Подставить $f(d)$ в правую часть для $g(n)$ и изменить порядок суммирования.

73. Ясно, что $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\tau(k)=\sum\limits_{k\leqslant n}\sum\limits_{xy=k}1=\sum\limits_{xy\leqslant n}1$, т. е. это число равно числу точек с целыми координатами (x, y) под гиперболой $xy=n$.

74. $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\zeta(k)=\sum\limits_{xy\leqslant n}x$, т. е. эта сумма равна сумме абсцисс точек с целыми координатами под гиперболой $xy=n$. Группировка слагаемых по вертикалям и по горизонталям приводит к требуемым формулам.

76. Воспользоваться тем, что любое натуральное число однозначно представляется в виде произведения полного квадрата на число, свободное от квадратов, и воспользоваться формулой предыдущей задачи.

77. Решается аналогично предыдущей задаче.

78. $2^{k(n)}$ есть число разложений числа n на взаимно простые множители. Поэтому, $\sum\limits_{x \leqslant M} 2^{k(x)}$ есть число точек под гиперболой $xy = M$ с целыми взаимно простыми координатами.

86. Воспользоваться тем, что квадрат нечетного числа сравним с 1 по модулю 4.

98. Наибольший общий делитель k двух данных чисел взаимно прост с a и с b. Поэтому при переходе к сравнениям по модулю k допустимы отрицательные показатели. Ввести для $d = (m, n)$ линейное представление.

99. Соединить слагаемые, равноотстоящие от начала и конца.

100. Начать, как в предыдущей задаче, удвоить после вынесения p и обосновать возможность замены слагаемых на обратные.