## ГЛАВА II

**110.** См. задачу 109.

**114.** Воспользоваться тем, что левые части легко представляются в виде суммы двух квадратов.

**117.** Разложить по формуле бинома Ньютона, приравнять мнимую часть к нулю и показать, что всякий простой делитель $b$, кроме 3, входит во все слагаемые в более высокой степени, чем в первое. То же имеет место, если $b$ делится на $3^2$. Аналогично для $a$.

**120.** Напоминаем, что $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos^2 15° = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

**125.** Выразить $t$ через $z$ и доказать, что $\overline{t} = t$.

**126.** $Rz$ — планета, $Rz + \rho z^n$ — ее спутник.

**129.** Написать уравнение в полярных координатах.

**137.** В примере с) вспомнить $\cos 15°$ и $\sin 15°$.

**138.** Перейти к тригонометрической форме.

**141.** Перейти к половинному углу.

**149.** Положить $\cos x + i \sin x = \alpha$. Тогда $\cos x = \dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}$,

$$\sin x = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}; \quad \cos kx = \frac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2}, \quad \sin kx = \frac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}.$$

**150.** Положить $\cos x + i \sin x = \alpha$. Тогда $\cos^{2m} x = \left(\dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^{2m}$

и т. д.

**151.** Так как $\sin(k+1)x+\sin(k-1)x=2\cos x\sin kx$, имеем $U_{k+1}=tU_k-U_{k-1}$, где $U_k=\frac{\sin kx}{\sin x}$, $t=2\cos x$. Применить метод индукции.

**152.** Так как $\sin x\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(m+1)x-\sin(m-1)x)$, можно воспользоваться формулой предыдущей задачи.

**153.** Воспользоваться разложением по формуле бинома Ньютона $(1+i)^n$.

**154.** Разложить по формуле бинома Ньютона $\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

**157.** Ввести $\alpha=\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}$. Положить $T=\sin x+\sin 2x+ +\ldots+\sin nx$ и $S=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$. Тогда

$$S+iT=\alpha^2+\alpha^4+\ldots+\alpha^{2n}=\alpha^{n+1}\frac{\alpha^n-\alpha^{-n}}{\alpha-\alpha^{-1}}.$$

**164.** Воспользоваться тем, что $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}$.

**166.** Для вычисления сумм вида $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1}$ их полезно умножить предварительно на $1-a$.

**169.** Здесь $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Формулу Кардана удобно преобразовать к виду $x=2r\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}$, где $r=\sqrt{\frac{|p|}{3}}$, $\cos\varphi=\frac{q}{2r^3}$.

**170.** $x_1=\alpha+\beta$; $x_2=\alpha\omega+\beta\omega^2$; $x_3=\alpha\omega^2+\beta\omega$; $\alpha^3+\beta^3=-q$, $3\alpha\beta=-p$, где $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**172.** Положить $x=\alpha+\beta$.

**181.** Доказать, что все корни $x^{p^{m-1}}-1$ и только они не являются первообразными корнями $x^{p^m}-1$.

**182.** Если $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, то искомая сумма может быть записана так: $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

**183.** Умножить на $1-\varepsilon$. **184.** Показать, что $\varepsilon^n=-1$.

**186.** Из суммы всех корней 15-й степени из 1 вычесть сумму корней, принадлежащих показателям 1, 3 и 5.

**187.** Длина стороны искомого правильного 14-угольника равна $2\sin\frac{\pi}{14}=-2\cos\frac{4\pi}{7}=-2(\varepsilon+\varepsilon^{-1})$, где $\varepsilon=\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$ — один из первообразных корней 7-й степени из 1.

**192.** $2\cos\varphi=\lambda+\lambda^{-1}$, $2\cos(\varphi+k\alpha)=\lambda\mu^k+\lambda^{-1}\mu^{-k}$, где $\lambda=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\mu=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

**197.** Показать, что если $n$ — нечетное, то для получения всех первообразных корней степени $2n$ из единицы достаточно все первообразные корни степени $n$ умножить на $-1$.

**199.** Использовать задачу 198.

**200.** Проще всего воспользоваться элементами теории степенных рядов, именно, деление в формуле $X_{pq}(x)=\frac{(1-x^{pq})(1-x)}{(1-x^p)(1-x^q)}$ заменить умножением на $(1+x^p+x^{2p}+\ldots)(1+x^q+x^{2q}+\ldots)$.

**205.** Рассмотреть случаи: 1) $n$ — степень простого числа; 2) $n$ — произведение степеней различных простых. Для случая 1) использовать задачу 181, для 2) задачи 199 и 202.

**206.** Рассмотреть случаи: 1) $n$ — нечетное, большее 1; 2) $n=2^k$; 3) $n=2n_1$, $n_1$ — нечетное, большее 1; 4) $n=2^k n_1$, где $k>1$, $n_1$ — нечетное, большее 1.

**207.** Умножить сумму $S$ на сопряженную и принять во внимание, что $\varepsilon^{x^2}$ не меняется при замене $x$ на $x+n$.

**208.** Записать $u_n=1+\frac{a+bi}{n}$ в тригонометрической форме и искать отдельно предел модуля и предел аргумента числа $u_n^n$.