ГЛАВА III

222. Воспользоваться результатом задачи 221 е).

241. Рассмотрев различные возможности расположения элемента 1, установить формулу $u_n^k = u_{n-1}^k + u_{n-1}^{k-1} + \ldots + u_{n-1}^{k-n+1}$, считая $u_{n-1}^j = 0$ при $j < 0$.

257. Транспонировать.

265. К последнему столбцу прибавить первый, умноженный на 100, и второй, умноженный на 10.

273. Из второго столбца вычесть первый.

290. Ввести $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

292. Первую строку прибавить ко всем остальным.

293. Разложить по элементам первой строки и показать, что

$$\Delta_{2n} = (a^2 - b^2)\,\Delta_{2n-2}.$$

294. Первую строку вычесть из всех остальных.

295. Вторую строку вычесть из всех остальных.

296. Все столбцы прибавить к первому.

297. Из каждой строки вычесть предшествующую.

299. Все столбцы прибавить к первому.

300. К первой строке прибавить последующие, умноженные на $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ соответственно или разложить по элементам первой строки.

303. Первую строку прибавить ко второй.

304. $\Delta=\Delta'-b_1\delta$, где Δ' — определитель задачи 303, δ — минор левого верхнего элемента.

305. Из первой строки вынести a и из второй вычесть первую.

306. Вынести α из первой строки и вычесть первую строку из второй.

307. $\Delta_n=\Delta'+\beta\Delta_{n-1}$, где Δ' — определитель предыдущей задачи.

309. Разложить по элементам первого столбца.

311. Положить $x=2\cos\theta$ и применить результат задачи 310.

312. Применить результаты задач 307 и 311.

313. Воспользоваться тем, что $1-C_k^1+C_k^2-\ldots=(1-1)^k=0$.

314. Из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предыдущий. Затем из каждой строки вычесть предыдущую. Доказать, что $\Delta_n=\Delta_{n-1}$. При вычислении иметь в виду, что $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

315. Из каждого столбца вычесть предыдущий.

316. Из каждой строки вычесть предыдущую. Доказать, что $\Delta_n=\Delta_{n-1}$.

317. Вынести из 1-й строки m, из 2-й $m+1$ и т. д., из последней $m+n$. Из 1-го столбца вынести $\frac{1}{k}$, из 2-го $\frac{1}{k+1}$ и т. д. Это снизит на 1 оба индекса.

318. Из каждого столбца вычесть предыдущий. В полученном определителе из каждого столбца вычесть предыдущий, сохраняя первые два без изменения. Вновь из каждого столбца вычесть предыдущий, сохраняя без изменения первые три столбца, и т. д.

319. Из каждой строки вычесть предыдущую и показать, что $\Delta_{n+1}=(x-1)\Delta_n$.

320. Добавить все строки к первой.

322. Добавить все столбцы к первому и вычесть первую строку из всех остальных.

323. Представить в виде суммы двух определителей и показать, что $\Delta=a_2a_3\ldots a_n+a_1\Delta'$, где Δ' — минор левого верхнего элемента.

327. Представить матрицу в виде суммы двух матриц, каждая из которых имеет пропорциональные столбцы.

328. Применить результат задачи 326, учитывая, что столбцы матрицы $CB=(c_ib_j)$ пропорциональны.

330. Применить результат задачи 326.

332. Рассмотреть как $\det(A+E)$, где A — матрица задачи 327.

334. Матрица определителя равна $\operatorname{diag}(x_i-a_ib_i)+BA$, где $A=(a_1,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,\ldots,b_n)^\top$.

337. Положив в левом верхнем углу $x=(x+a)-a=(x-a)+a$, связать Δ_n и Δ_{n-1} двумя способами.

340. Записать в левом верхнем углу $0=b_1-b_1$ и свести задачу к вычислению определителя меньшего порядка.

341. Из каждой строки вычесть первую, умноженную последовательно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из каждого столбца вычесть первый, умноженный последовательно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

342. Из первого столбца вынести h; первый столбец прибавить ко второму.

343. Из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предшествующий столбец, умноженный на a.

345. Разложить по элементам последнего столбца, а затем все миноры (кроме $\det A$) разложить по элементам последней строки.

348. Из каждой строки вычесть предшествующую.

349. В левом верхнем углу положить $1=x+(1-x)$. Определитель представить в виде суммы двух определителей. Использовать результат задачи 348.

350. Умножить первую строку на x^{n-1}, вторую на x^{n-2} и т. д., затем вынести из первого столбца x^n, из второго x^{n-1} и т. д.

352. Разложить по элементам первого столбца.

356. Воспользоваться результатом задачи 355.

359. К первому столбцу прибавить второй, умноженный на C_{2n}^1; третий, умноженный на C_{2n}^2, и т. д.

360. $2\cos k\varphi=(2\cos\varphi)^k+\ldots$

361. $\dfrac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}=(2\cos\varphi)^k+\ldots$

362. В первой строке положить $1=x_1-(x_1-1)=\ldots=x_n-(x_n-1)$.

364. Определитель равен минору, соответствующему элементу z^s в определителе

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z & x_1 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

365. Приписать первую строку $1, 0, \ldots, 0$ и первый столбец $1, 1, 1, \ldots, 1$. Вычесть первый столбец из всех последующих.

366. Разложить по элементам последней строки (или следовать указанию к задаче 368).

367. Из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предшествующий, умноженный на x.

368. Сначала из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предшествующий, умноженный на x. Затем, после понижения порядка и вынесения очевидных множителей, преобразовать первые строки (зависящие от x), используя соотношение

$$(m+1)^s-m^s=sm^{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}m^{s-2}+\ldots+1.$$

369. К каждой строке прибавить все последующие, из каждого столбца вычесть предыдущий. Доказать, что

$$\Delta_{n+1}(x) = (x-n)\,\Delta_n(x-1).$$

371. Из каждой строки вычесть первую, из каждого столбца вычесть первый.

373. Одна из возможностей — раскрыть определитель:

$$\sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} (1+x)^{a_1 b_{\alpha_1} + \ldots + a_n b_{\alpha_n}} \cdot (-1)^{\sigma},$$

где $\sigma = +1$ или -1 в зависимости от четности или нечетности перестановки $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Учесть, что $\sum\limits_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} b_{\alpha_1}^{\lambda_1} \ldots b_{\alpha_n}^{\lambda_n} (-1)^{\sigma} = 0$, если среди показателей есть равные, и что биномиальные коэффициенты являются полиномами от $b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_n}$. Подсчитать коэффициент при $x^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

377. Рассмотреть

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^n & b_1^n & \ldots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \ldots & b_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

380. Рассмотреть

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

381. Возвести в квадрат. Преобразовать как определитель Вандермонда и каждую разность преобразовать к синусу некоторого угла. Таким образом определится знак.

382. Умножить справа на

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$.

390. Умножить справа на $\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

391. Умножить справа на $\begin{pmatrix} E_m & -B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$.

392. Рассмотреть матрицу $\begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix}$ и, умножая ее на подходящие множители, убедиться в том, что ее определитель равен обоим исследуемым определителям.

393. Воспользоваться задачей 392.

394. Сперва допустить, что A невырождена и умножить справа на $\begin{pmatrix} E & -B \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Чтобы избавиться от этого предположения, добавить к A матрицу tE, воспользоваться отсутствием делителей нуля в кольце многочленов и затем положить $t=0$.

397. Провести доказательство по индукции, сначала разобрав случай, когда A_{11} есть неособенная матрица. Общий случай свести к этому, добавив к матрице λE.

398. Умножение дает $\begin{pmatrix} \alpha E & U \\ U'' & \beta E \end{pmatrix}$, где $\alpha = \det A + \det B$, $\beta = \det C + \det D$, $U = AC' + BD''$. Воспользоваться результатом задачи 394 (или задачи 391) и тем, что

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A'' & C'' \\ B'' & D'' \end{pmatrix}.$$

399. Воспользоваться тем, что если сумма диагональных элементов матрицы U равна нулю, то $U' = -U$.