ГЛАВА IV

401. Сложить уравнения.

402. Вычесть из каждого уравнения следующее, в последнем сгруппировать слагаемые левой части по два, начиная с последнего.

403. Исключить неизвестные мультипликативно или перейти к логарифмам.

412. Найти X из первого уравнения и подставить во второе.

418. Умножить справа на

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

419. Вычислить миноры.

420. Вычислить миноры.

421. Уравнения для вычисления строк обратной матрицы получаются из первого из них круговой перестановкой неизвестных.

423. Сравнить системы уравнений для определения элементов двух соседних строк.

431. Проверяется посредством умножения.

432. $A+BC=A^{-1}(E_n+(A^{-1}B)C)$. Применить формулу предыдущей задачи.

433. Данная матрица равна E_n+BC, где $B=(1, 1, \ldots, 1)^{\top}$, $C=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

434. Данная матрица равна E_n+BC, где

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^{\top}, \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

435. $A=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)+(1, 1, \ldots, 1)(1, 1, \ldots, 1)^{\top}$.

438. Умножить справа на

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и слева на $S^{\top}$. Затем воспользоваться формулой задачи 437.

439. Матрицы, получающиеся из A поворотом на 90° в обе стороны, суть $A^{\top}J$ и $JA^{\top}$, где J — матрица, имеющая единицы на второй диагонали, а на остальных местах нули.

440. Записать решение систем с помощью обратной матрицы.

448. Записать равенства, в которые превращаются уравнения системы после подстановки решений, в матричной форме.

451. Без нарушения общности можно считать, что левая квадратная субматрица C_1 матрицы C невырождена. Умножив C слева на C_1^{-1}, придём к равносильной системе того же вида, что и в предыдущей задаче. Все миноры порядка m умножатся на $\det C_1^{-1}$. Миноры матрицы, строки которой образуют фундаментальную систему решений, тоже изменяются пропорционально, при переходе от одной фундаментальной системы к другой.

455. Любую матрицу можно привести к требуемому виду элементарными преобразованиями над строками и столбцами, что равносильно умножениям слева и справа на невырожденные матрицы.

456. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

459. Из требования $XAX=X$ следует, что ранг матрицы X равен 1.

460. Умножить слева на $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1}C & E \end{pmatrix}$.

462. Воспользоваться совместностью, т. е. существованием такой X_0, что $AX_0 = B$.

463. Воспользоваться существованием полуобратной матрицы для C.

466. Сначала доказать формулы $B^kA = AB^k - kCB^{k-1}$ и $(A+B)_n(A+B) = (A+B)_{n+1} - nC(A+B)_{n-1}$. Затем применить метод индукции.

472. Рассмотреть сумму диагональных элементов.

473. Воспользоваться результатом задачи 467.

474. Взять в качестве A диагональную матрицу с попарно различными элементами.

483. Воспользоваться результатом задачи 455.

484. Воспользоваться результатами задач 483 и 458.

485. Одна из матриц $E+A$, $E-A$ должна иметь ранг 1.

486. Если

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

то для левых верхних блоков A_k матриц A_n будет

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{pmatrix}.$$

Поэтому естественно вести доказательство по индукции.

487. Для доказательства достаточно установить, что матрицу A можно умножить слева и справа на треугольные матрицы с единичной диагональю так, чтобы получилась матрица, имеющая в каждой строке и в каждом столбце по одному ненулевому элементу. Такое умножение слева равносильно добавлению к строкам линейных комбинаций строк, лежащих ниже, умножение справа равносильно добавлению к столбцам линейных комбинаций столбцов, лежащих левее.

488. Достаточно доказать, что из $R_1D_1R_2 = D_2$, где R_1 и R_2 — правые треугольные матрицы с единичной диагональю, а D_1 и D_2 имеют по одному ненулевому элементу в каждой строке и в каждом столбце, следует $D_1 = D_2$, $R_1 = R_2 = E$. Нужно сравнивать элементы в том же порядке, как получать нули в предыдущей задаче, т. е. начать с самого низкого ненулевого элемента первого столбца, затем сравнить лежащие от него выше и правее. Затем обратиться ко второму столбцу и т. д.

490. За счет умножения слева на матрицу C можно добиться того, чтобы больший по модулю элемент первого столбца находился в первой строке. За счет умножения слева на $A^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ можно уменьшить модуль левого верхнего элемента.

493. Установить единственность разложения задачи 492. Обозначив через $F_n(k)$ искомое число, доказать мультипликативность функции $F_n(k)$. Наконец, подсчитать $F_n(p^m)$.

503. Воспользоваться результатом задачи 502.

505. Воспользоваться теоремой Лапласа и неравенством Коши — Буняковского (задача 498).

506. Пусть n — порядок матрицы A, m — число строк матрицы B, k — число строк матрицы C. Интересен только случай $m+k<n$. Дополнить матрицу A до квадратной, присоединив $n-m-k$ линейно независимых строк, ортогональных к строкам матрицы A, и воспользоваться задачей 505.

508. В формулировках и доказательствах следует заменить $A^{\top}$ на $A^* = (\overline{A})^{\top}$. Ортогональность строк $(b_1, \ldots, b_n)$ и $(c_1, \ldots, c_n)$ понимать, как выполнение равенства $b_1\overline{c}_1 + \ldots + b_n\overline{c}_n = 0$.

510. Приписать к определителю слева столбец, все элементы которого равны $\frac{M}{2}$, и сверху строчку, все элементы которой (кроме углового), равны 0, затем вычесть первый столбец из всех остальных.

513. Убедиться, что максимум реализуется на матрице, все элементы которой равны ± 1. Добавив первую строку ко всем остальным, увидим, что он делится на 2^{n-1}.

515. Установить связь ассоциированной матрицы с обратной.

516. Пусть $A^{-1} = (\alpha_{ij})$. Для подсчета левого верхнего минора рассмотреть произведение матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \\ 0 & & E_{n-m} \end{pmatrix} A$$

и его определитель. Для общего случая переставить надлежащим образом строки и столбцы, учитывая, что строки и столбцы матрицы A^{-1} переставляются так же, как строки и столбцы $A^{\top}$, а $\det A$ приобретает множитель, на который алгебраическое дополнение отличается от дополнительного минора.

521. Всякая матрица может быть представлена в виде произведения диагональных и треугольных матриц, например, матриц элементарных преобразований. В силу результата задачи 519, достаточно ограничиться доказательством для треугольных матриц.

523. Воспользоваться результатом задачи 518 и тем, что любая матрица ранга 1 есть произведение

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

524. Без нарушения общности можно считать, что данные числа $a_1, \dots, a_n$ отличны от нуля. Строки следует взять ортогональными к строке $a_1, \dots, a_n$, выбрав их наиболее «экономно».

525. См. указание к задаче 523.

526. В силу взаимной простоты данных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ найдутся целые $u_1, u_2, \dots, u_n$ такие, что $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 1$. Воспользоваться результатом задачи 524.

530. Все главные миноры матрицы положительно определенной формы положительны, как определители матриц положительно определенных форм. Поэтому можно применить результат задачи 486.

531. Принять линейную форму, квадрат которой добавляется к квадратичной форме, за новую независимую переменную.

532. Выделить из формы f один квадрат и воспользоваться результатом задачи 531.

534. Разложить f и φ на сумму квадратов и воспользоваться дистрибутивностью операции (f, φ).

541. Воспользоваться ортогональным преобразованием к каноническому виду.

543. Воспользоваться результатом задачи 486.