ГЛАВА V

553. Разложить $f(x)$ по степеням $x-3$, затем заменить x на $x+3$.

561. Ввести в рассмотрение полиномы

$$f_1(x) = nf(x) - xf''(x); \quad f_2(x) = nf_1(x) - xf_1'(x)$$

и т. д.

567. Доказывать способом математической индукции.

568. Отличный от нуля корень $(k-1)$-й кратности полинома $f(x)$ есть корень $(k-2)$-й кратности полинома $xf''(x)$ и т. д.

569. Дифференцировать равенство, показывающее, что полином делится на свою производную.

573. Рассмотреть функцию $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ или $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

574. Связать задачу с рассмотрением корней

$$\varphi(x) = f(x) f'(x_0) - f'(x) f(x_0),$$

где x_0 — корень $[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)$.

575. Использовать решение предшествующей задачи и разложить $f(x)$ по степеням $x - x_0$.

576. Ввести в рассмотрение полином $\bar{f}(z)$, коэффициенты которого комплексно сопряжены с коэффициентами $f(z)$.

584. Поделить на $(1-x)^n$ и дифференцировать $m-1$ раз, полагая после каждого дифференцирования $x=0$. Воспользоваться тем, что степень $N(x)$ меньше m, степень $M(x)$ меньше n.

588. Найти корни полиномов и учесть старшие коэффициенты [в задачах a) и b)]. В задаче c) для разыскания корней целесообразно положить $x = \operatorname{tg}^2 \theta$.

594. Найти общие корни.

596. 1. Построить рекуррентное соотношение типа «треугольника Паскаля». 2. Подсчитать кратности корней числителя и знаменателя.

612. Доказать предварительно, что $f(x)$ не имеет вещественных корней нечетной кратности.

620. Воспользоваться тем, что уравнение не должно изменяться при замене x на $-x$ и x на $\frac{1}{x}$.

621. Уравнение не должно меняться при замене x на $\frac{1}{x}$ и x на $1-x$.

624. Проще всего по формуле Лагранжа

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)} \qquad (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \text{ — корни знаменателя}).$$

625. e) Использовать задачу 584. f) Положить $\frac{a+x}{2a} = y$. d, h) Искать разложения способом неопределенных коэффициентов. Часть найти подстановкой $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ после умножения на общий знаменатель. Затем продифференцировать и снова положить $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

626. Разложить сперва по формуле Лагранжа, затем объединить комплексно сопряженные слагаемые.

629. Использовать задачу 628. В примере b) разложить $\frac{1}{x^2-3x+2}$ на простейшие дроби.

633. Воспользоваться формулой Лагранжа. Произвести деление в каждом слагаемом результата и привести подобные члены, используя результат задачи 183.

635. Выразить $f(x_0)$ через $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, и сравнить результат с условием задачи, принимая во внимание независимость $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. Затем изучить $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, разложив его по степеням $x-x_0$.

636. Полином x^s представить через свои значения посредством интерполяционной формулы Лагранжа.

639, 640. Составить интерполяционный полином по способу Ньютона.

641. Найти значения искомого полинома при $x=0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$.

642. Можно решить задачу, пользуясь способом Ньютона. Короче рассмотреть полином $F(x)=xf(x)-1$, где $f(x)$ — искомый полином.

644. Рассмотреть полином $(x-a)f(x)-1$.

645. Составить полином по способу Ньютона, вводя для удобства вычислений в знаменателе каждого слагаемого факториал.

646. Рассмотреть полином $f(x^2)$, где $f(x)$ — искомый полином.

651, 652. Воспользоваться задачей 649.

653. В примере с) разложить полином по степеням $x-1$.

654. Разложить по степеням $x-1$ (или положить $x=y+1$).

655. Положить $x=y+1$ и методом математической индукции доказать, что все коэффициенты делимого и делителя, кроме старших, делятся на p.

656, 657. Доказывается, как теорема Эйзенштейна.

661. Разложить на неприводимые множители по модулям 2 и 3.

665. Воспользоваться тем, что $f(x)$ не имеет корней в поле $GF(p)$ и $f(x+1)=f(x)$.

673, 674. Допустив приводимость $f(x)$, положить $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ и сделать заключение о значениях делителей.

675. Подсчитать число равных значений предполагаемых делителей.

676. Воспользоваться тем, что $f(x)$ не имеет вещественных корней.

677. Доказать, что полином, имеющий более чем три целых корня, не может иметь своим значением простое число при целом значении независимой переменной, и применить это к полиному $f(x)-1$.

678, 679. Воспользоваться результатом задачи 677.

680. Примеры b) и с) можно решить способом неопределенных коэффициентов или при помощи линейного представления наибольшего общего делителя.

683. Воспользоваться соотношениями $\lambda_i x=\lambda_{i+1}-a_{i+1}$ и $\lambda_i\lambda_j=$ $=\lambda_i(x\lambda_{j-1}+a_j)=\lambda_{i+1}\lambda_{j-1}+a_j\lambda_i-a_{i+1}\lambda_{j-1}$.

684. Примеры а) — е) лишь формой записи отличаются от примеров типа b), с) задачи 680.

685. а) Из $\lambda=\alpha^2+\alpha+1$ получим $\lambda\alpha=\alpha^3+\alpha^2+\alpha=\alpha^2+2\alpha+1$ и $\lambda\alpha^2=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=2\alpha^2+2\alpha+1$, откуда

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Аналогично могут быть решены и другие примеры.

705. Сложить $\varphi_k(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Формула остается верной и при $k>n$, если считать $f_{n+1}=f_{n+2}=\ldots=0$. Чтобы в этом убедиться, достаточно присоединить к $x_1, \ldots, x_n$ числа $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots$ $\ldots=x_k=0$.

712. Сначала вычислить сумму

$$\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)^k,$$

затем подставить $x=x_j$ и просуммировать по j от 1 до n. Наконец, удалить лишние слагаемые и поделить на 2.

713. Решается, как задача 712.

714. Второй столбец умножить на $-s_1$, третий — на $s_2, \ldots, k$-й — на $(-1)^{k-1}s_k$ и добавить к первому; затем воспользоваться формулами Ньютона.

718. Достаточно рассмотреть случай $n=p_1\ldots p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — попарно различные нечетные простые числа. В этой ситуации $|s_1|=|s_2|=|s_4|=1$, $|s_3|\leqslant 2$, $|s_5|\leqslant 4$, $|s_6|\leqslant 2$. Пользуясь формулами Ньютона, последовательно оценить сверху $|f_k|$ для $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

719. Задача легко решается посредством формул Ньютона или посредством представления степенных сумм через основные симметрические функции в виде определителей (задача 714). Однако еще проще умножить уравнение на $(x-a)\cdot(x-b)$ и подсчитать степенные суммы для нового уравнения.

720. Считать корни полинома $f(x)$ независимыми переменными. Умножить определитель из коэффициентов остатков на определитель Вандермонда.

721. Полиномы $\psi(x)$ суть остатки от деления полиномов $\varphi(x)$, $x\varphi(x), \ldots, x^{n-1}\varphi(x)$ на $f(x)$. Задача решается так же, как предшествующая.

722. Решается, как задача 721.

729. Воспользоваться тем, что m-е степени первообразных корней n-й степени из 1 пробегают все первообразные корни степени $\dfrac{n}{d}$ из 1, где d есть наибольший общий делитель m и n.

730. Воспользоваться результатом задачи 729 и тем, что $R(X_m, X_n)$ есть делитель $R(X_m, x^n-1)$ и $R(X_n, x^m-1)$.

735, 736. Вычислить $R(f', f)$.

740. Умножить на $x-1$.

741. Умножить на $x-1$ и воспользоваться результатом задачи 736.

744. Вычислить $R(X_n, X_n')$. При вычислении значений X_n' в корнях X_n представить X_n в виде

$$(x^n-1)\prod (x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)},$$

считая d пробегающим собственные делители n. Принять во внимание, что при корнях $X_n(x)$ обращается в нуль только первый множитель, что ε^d пробегает множество корней $X_{n/d}$ каждый $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n/d)}$ раз, когда ε пробегает множество корней X_n. Подсчитать раздельно модуль дискриминанта и его знак.

745. Воспользоваться соотношением $E_n'=E_n-x^n$.

746. Воспользоваться соотношением

$$(nx-x-a)F_n-x(x+1)F_n'+\frac{(a-1)\dots(a-n)}{n!}=0.$$

747. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n=xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2};\quad P_n'=nP_{n-1}.$$

748. Воспользоваться соотношениями:

$$xP_n'=nP_n+n^2P_{n-1};\quad P_n=(x-2n+1)P_{n-1}-(n-1)^2P_{n-2}.$$

749. Воспользоваться соотношениями:

$$(4-x^2)P_n'+nxP_n=2nP_{n-1};\quad P_n-xP_{n-1}+P_{n-2}=0.$$

750. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n-2xP_{n-1}+(x^2+1)P_{n-2}=0;\qquad P_n'=(n+1)P_{n-1}.$$

751. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n-(2n-1)xP_{n-1}+(n-1)^2(x^2+1)P_{n-2}=0;\quad P_n'=n^2P_{n-1}.$$

752. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n-(2nx+1)P_{n-1}+n(n-1)x^2P_{n-2}=0;$$
$$P_n'=(n+1)nP_{n-1}.$$

753. Решить задачу методом множителей Лагранжа. Записать результат приравнивания производных нулю в виде дифференциального уравнения относительно полинома, дающего максимум, и решить уравнение методом неопределенных коэффициентов. Принять во внимание, что $\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial x_i}=\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$, где $D=\prod (x_l-x_j)^2$, $f(x)=$ $=(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.