# ГЛАВА VI

**759.** Применить теорему Штурма к полиному $f_k$ для промежутка $(-\infty, +\infty)$, что возможно, ибо последовательность $f_k, f_{k-1}, \ldots, f_0$ удовлетворяет требованиям ряда Штурма.

**760.** Разложить полином на линейные множители и воспользоваться тем, что аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

**761.** Применить принцип аргумента, записав

$$f(z)=f_1(z)\left(1+\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right).$$

**762.** Доказывается так же, как принцип аргумента.

**763.** Привлечь наглядно-геометрические соображения, отталкиваясь от геометрического смысла $\frac{1}{\pi}\Delta \arg h(x)$ как числа полуоборотов (с учетом направления) точки $f(x)+ig(x)$, когда $x$ пробегает вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$.

**769.** Воспользоваться тем, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{f'(x_k)}=0$ при $0\leqslant m\leqslant n-2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k^{n-1}}{f'(x_k)}=1$ (см. задачи 636, 637) и $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_i^m f(x_i)}{f'(x_i)}=0$.

**770.** Воспользоваться результатом задачи 683.

**771.** Воспользоваться результатом задачи 683 и принять во внимание, что $xp_k(x)=p_{k+1}(x)-a_k$.

**772.** Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^m p_k(x_i)}{f'(x_i)}=1$, если $m+k=n$, и $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^m p_k(x_i)}{f'(x_i)}=0$, если $0\leqslant m\leqslant n-1$ и $m+k\neq n$. Показать, что элементы соседних строк матрицы квадратичной формы связаны такими же соотношениями, как коэффициенты соседних полиномов в способе Безу.

**781.** Составить ряд Штурма и рассмотреть порознь случаи четного и нечетного $n$.

**783.** Воспользоваться тем, что $F'(x) = 2f(x)f'''(x)$ и что $f'''(x)$ — постоянная.

**785.** Достаточно построить ряд Штурма для отрицательных $x$, ибо полином $E_n(x)$ положительных корней не имеет.

**792.** Воспользоваться результатом задачи 763 и теоремой Штурма.

**793.** Применить результат задачи 763.

**794.** Пусть степень $f(x)$ равна $n$, степень $g(x)$ не превосходит $n$. Ясно, что индекс $f(x)$ относительно $\lambda f(x) + \mu g(x)$ равен индексу $f(x)$ относительно $g(x)$ при $\mu > 0$ и отличается от него знаком при $\mu < 0$, т. е. равен $\pm n$, следовательно, корни $\lambda f(x) + \mu g(x)$ вещественны и разделяются с корнями $f(x)$.

Поучительно и прямое доказательство, основанное на рассмотрении поведения функции $\psi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

**795.** Воспользоваться теоремой Руше, взяв за главное слагаемое первый член разложения $\varphi(z)$ по степеням $z - z_0$.

**796.** Пусть $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) = (x - x_0)^k f_1(x)$, $f_1(x_0) \neq 0$. Геометрически очевидно, что уравнения $\frac{f(x)}{g(x)} + t = 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} - t = 0$ имеют при нечетном $k$ один вещественный корень в окрестности $x_0$. При четном $k$ одно из этих уравнений имеет два вещественных корня в окрестности $x_0$, другое — ни одного. Сопоставить это с результатом предыдущей задачи.

**797.** Доказать от противного, воспользовавшись теоремой Ролля и результатом задачи 796.

**798.** Легко выводится из результата задачи 794. Можно обратиться и к следующим соображениям «по непрерывности»: матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc > 0$ можно связать с единичной непрерывным путем с сохранением положительности определителя. Как легко видеть, полиномы $\alpha f + \beta g + i(\gamma f + \delta g)$ при $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ не могут иметь вещественных корней. Поэтому, двигаясь непрерывно, они не могут переходить из верхней полуплоскости в нижнюю и обратно.

**799.** Исследовать мнимую часть $\frac{f'(z)}{f(z)}$, разложив эту дробь на простейшие.

**800.** Сделать замену переменной так, чтобы данная полуплоскость преобразовалась в полуплоскость $\operatorname{Im}(x) > 0$.

**801.** Связать с задачей 800.

**802.** Применить результаты задач 794 и 797.

**803.** Положить $x = yi$ и воспользоваться результатами задачи 793.

**804, 805.** Воспользоваться результатом задачи 803.

**806.** Положить $x=(1+y)/(1-y)$ и воспользоваться результатом задачи 804.

**807.** Разделить на $x^{n-m}$.

**810, 811.** Умножить на $x-1$.

**815.** Разложить $g(x)$ на множители и применить несколько раз результат задачи 814.

**816.** Применить результат задачи 815 к полиному $x^m$.

**817.** Воспользоваться тем, что если все корни полинома $a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ вещественны, то все корни полинома $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ вещественны.

**819.** Рассмотреть $\left|\dfrac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}\right|$, где

$$\varphi(x)=a_0\cos\varphi+\ldots+a_n\cos(\varphi+n\theta)\,x^n,$$
$$\psi(x)=b_0\sin\varphi+\ldots+b_n\sin(\varphi+n\theta)\,x^n.$$

**820, 821.** Представить функцию в виде:

$$f(z)=f(a)+\frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k\,[1+\varphi(z)];\quad \varphi(a)=0.$$

**822.** Разложить $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ на простейшие дроби и оценить мнимую часть.