ГЛАВА VII

830. Рассмотреть $z_1 z_2$, где z_1 — какой-либо левый нуль, z_2 — правый нуль.

831. Рассмотреть $u_1 u_2$, где u_1 — какая-либо левая единица, u_2 — правая единица.

835. Рассмотрев Ga, где G — данная полугруппа, показать, что $Ga = G$, т. е. уравнение $xa = b$ разрешается в G при любых a и b. В частности, $xa = e$, где e — левая единица. Однозначность очевидна.

855. Показать, что имеется пятнадцать плоскостей симметрии икосаэдра и их можно разбить на пять троек попарно ортогональных плоскостей.

864. Классы смежности по K разбиваются на одинаковое число классов смежности по H.

865. Установить, что всякое непустое пересечение классов смежности по H_1 и H_2 есть класс смежности по H и всякий класс по H есть пересечение классов смежности по H_1 и H_2.

867. Рассмотреть ее разложение на классы сопряженных элементов.

874. Для циклической группы доказывается непосредственно. Для нециклической — применить метод индукции, рассмотрев циклическую подгруппу и факторгруппу по ней.

875. Множество таких $x \in G$, что $x^{-1}ax=a$, есть подгруппа Z_a (она называется централизатором элемента a). Если $x^{-1}ax=y^{-1}ay$, то x и y принадлежат одному классу смежности по Z_a.

878. Убедиться, что все элементы этого класса имеют порядок 2, их попарные произведения принадлежат $G \setminus K$ и $H=G \setminus K$ есть подгруппа группы G, а K — класс смежности по этой подгруппе. Установить, что H — абелева группа нечетного порядка.

879. Положим $n=1+h_2+h_3$. Здесь n — порядок группы, $h_2 \geqslant h_3$ — порядки классов, делители n. Неравенство $h_2 \leqslant \frac{n}{3}$ возможно только при $n=3$, $h_2=h_3=1$. Поэтому $h_2=\frac{n}{2}$ и можно воспользоваться задачей 878.

880. $n=1+h_2+h_3+h_4$, $h_2 \geqslant h_3 \geqslant h_4$. Если $h_2 \leqslant \frac{n}{4}$, то $n=4$, $h_2=h_3=h_4=1$. Если $h_2=\frac{n}{2}$, можно применить задачу 878. Остается $h_2=\frac{n}{3}$. Если $h_3 \leqslant \frac{n}{4}$, то $n \leqslant 6$. Остается $h_3=\frac{n}{3}$, $h_4=\frac{n-3}{3}$. Но h_4 будет делителем n только при $n=12$ и $n=6$.

881. Множество N_H таких $x \in G$, что $x^{-1}Hx=H$ есть подгруппа (она называется нормализатором H), $H \subset N_H \subset G$. Остается применить результат задачи 864.

883. Рассмотреть отображение группы G в группу подстановок классов смежности Ha_i группы G по H, индуцированную умножением всех классов справа на элементы из G.

887. Доказательство провести методом математической индукции по порядку. Базу индукции дают абелевы группы (задача 874). Рассмотреть отдельно случаи, когда группа имеет нетривиальный центр и когда он отсутствует. Во втором случае обратиться к рассмотрению классов сопряженных элементов.

889. Если подгруппы порядков p и q — нормальные делители, то они коммутируют, и группа циклична. Если подгруппа порядка q не является нормальным делителем, то имеется p сопряженных подгрупп порядка q и столь много элементов порядка q, что подгруппа порядка p — единственная и потому нормальный делитель.

890. Нужно убедиться, что любая матрица из $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_m)$ может быть представлена в виде произведения матриц элементарных преобразований. Их прообразы в $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ очевидны.

891. Ядро отображения состоит из матриц вида $E+mA$. Нужно установить, что матрица этого вида при $A \neq 0$ не может быть периодической.

892. Каждое вращение трехмерного пространства есть поворот вокруг некоторой оси на некоторый угол.

893. Пусть H — нормальный делитель $SO(3)$ и $A \in H$ — вращение на угол, отличный от 0. Рассмотреть $CAC^{-1}A^{-1} \in H$ при всех $C \in SO(3)$ и воспользоваться соображениями непрерывности.

896. Для такой группы имеется гомоморфизм на группу второго порядка, именно, элементу группы сопоставляется $+1$ или -1 в зависимости от четности или нечетности соответствующей подстановки в регулярном представлении.

897. Воспользоваться тем, что группа линейных функций $x \longrightarrow \longrightarrow ax+b$, действующая в $GF(5)$, имеет индекс 6 в S_5. Подстановки классов смежности по этой подгруппе, индуцированные умножением на элементы из S_5, дают искомое представление.

901. Выяснить, каким образом можно изменять минимальную систему образующих.

905. В сплетении Φ взять подгруппу U, состоящую из пар $(1, f)$, причем $f(1)=1$. В качестве переставляемых элементов взять классы смежности по этой подгруппе.

907. Рассмотреть множества пар $(x_1, 1)$ и $(1, x_2)$, входящих в подпрямое произведение.

910. Пусть $a, b_1, \ldots, b_n$ — образующие группы G. Показать, что $ab_1, \ldots, ab_n$ можно принять за образующие группы, составленной из элементов четной длины и эти образующие свободны.

911. Убедиться в существовании такого автоморфизма α группы H, что $\alpha^2=1$ и $\alpha(u_i)=u_i^{-1}$. Затем построить полупрямое произведение $G=Z_2H$, считая, что образующий v_0 группы Z_2 индуцирует автоморфизм α в H. За образующие G можно взять $v_0, v_1, \ldots, v_k$, где $v_i=v_0u_i$. Все они имеют порядок 2.

912. Воспользоваться тем, что из трех преобразований σ_x, σ_y, σ_z два всегда увеличивают одну из координат. Если же точка лежит в области $x^2+y^2>z^2$, $y^2+z^2>x^2$, $z^2+x^2>y^2$, то все три преобразования увеличивают изменяемую координату. (Можно доказать, что область $x^2+y^2 \geqslant z^2$, $y^2+z^2 \geqslant x^2$, $z^2+x^2 \geqslant y^2$ есть фундаментальная область для группы.)

913. 1) Показать, что всякое целочисленное решение может быть переведено преобразованиями из группы, порождаемой σ_x, σ_y, σ_z и последующей перестановкой координат в область на поверхности, характеризуемую неравенствами $x \leqslant y \leqslant z$, $x^2+y^2 \geqslant z^2$, $y^2+z^2 \geqslant x^2$, $z^2+x^2 \geqslant y^2$. 2) Вычислить границы проекции этой области на плоскость xOy и убедиться, что в ней нет точек с целыми координатами при $a \neq 1$ и $a \neq 3$ и есть только одна при $a=1$ и при $a=3$.

914. Проверить, что если $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ — вещественная матрица с определителем 1, то из четырех матриц $A\sigma$, $A\sigma^{-1}$, $A\tau$ и $A\tau^{-1}$ три имеют большее, чем A, значение функции $\varphi(A)=|xy+zt|$. Если же выполнены неравенства $\varphi(A) < x^2 + z^2$ и $\varphi(A) < y^2 + t^2$, то все четыре матрицы имеют большее, чем A, значение функции φ.

Дальнейшие рассуждения аналогичны решению задачи 912. Вместо точки M_0 можно взять единичную матрицу.

925. Решить способом Эйлера.