ГЛАВА VIII

930. Представив вектор в виде $b_1e_1+\ldots+b_ne_n$, добавить $t(e_1+\ldots+e_n+e_{n+1})$, положив $t=-(b_1+\ldots+b_n)/(n+1)$. Единственность обеспечивается тем, что в соотношении $c_1e_1+\ldots+c_ne_n+c_{n+1}e_{n+1}=0$ необходимо $c_1=\ldots=c_n=c_{n+1}$.

931. Представить вектор в базисе $e_1, \ldots, e_n$ и, если есть отрицательные координаты, добавить $t(e_1+\ldots+e_n+e_{n+1})$, где t — наибольший из модулей отрицательных координат. Единственность доказывается аналогично предыдущей задаче.

932. Первый вектор — любой отличный от нуля. Второй — любой, не являющийся линейной комбинацией первого, третий — любой не являющийся линейной комбинацией первых двух и т. д.

939. Подсчитать число базисов и воспользоваться задачей 932.

940. Объединение базисов данного подпространства и допустимого m-мерного подпространства является линейно независимой системой.

941, 942. Непосредственно проверить, что каждый вектор, входящий в левую часть, входит и в правую и обратно.

943. Рассмотреть пространство троек векторов (x_1, x_2, x_3), $x_i \in P_i$, связанных соотношением $x_1+x_2+x_3=0$.

944. Включение тривиально. Далее, переходя к факторпространству по $(P_2 \cap P_3)+(P_3 \cap P_1)+(P_1 \cap P_2)$, свести задачу к случаю, когда P_1, P_2, P_3 попарно имеют нулевые пересечения. Наконец, воспользоваться результатами двух предыдущих задач.

945. Рассмотреть последовательность подпространств $V_i=U_i+P$ и убедиться, что $V_k=V_{k-1}$ при некотором k.

949. Использовать результат предыдущей задачи для построения всех базисов всех допустимых подпространств Q.

955. Линейное многообразие очевидно обладает указанным свойством. Для доказательства обратного утверждения нужно доказать, что если $x_0 \in M$, то $P=M-x_0$ есть векторное подпространство, т. е. если $y_1, y_2 \in P$, то $c_1y_1+c_2y_2 \in P$. Это удобно провести в три этапа. 1) Доказать, что если $y_1 \in P$, то $cy_1 \in P$. 2) Если $y_1 \in P$ и $y_2 \in P$, то $(1-c)y_1+cy_2 \in P$. 3) Если $y_1 \in P$ и $y_2 \in P$, то $c_1y_1+c_2y_2 \in P$.

976. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, положив $P=A_1S$.

982. d) Воспользоваться результатом задачи 939 и результатом пункта c).

984. Показать, что в качестве P можно взять образ, в качестве Q — ядро.

988. Установить, что оператор BA есть оператор проектирования S на некоторое подпространство P параллельно $\ker A$ и оператор AB есть оператор проектирования T на AS параллельно некоторому подпространству Q и затем показать, что полуобратный оператор, построенный при помощи этих подпространств, совпадает с B.

990. Показать, что $AA^{(-1)}$ есть оператор проектирования, его ядро и образ совпадают с ядром и образом оператора A.

998. Необходимость очевидна, нужно доказать достаточность. Для этого следует построить базис S так, чтобы из него можно было построить по определенному закону базис всех подпространств, составляющих флаги.

999. Для решения этой трудной задачи нужно, как и в предыдущей, найти некоторый канонический базис S. Без нарушения общности можно считать $S = P_1 + P_2 + P_3$. Удобно применить метод элементарных преобразований, записав исходные координаты базисных элементов в виде матрицы, разделенной на три вертикальных полосы. Ранг каждой полосы равен числу ее столбцов. Замену базиса в S можно рассматривать как цепочку элементарных преобразований над строками всей матрицы. Заменам базисов P_i соответствуют цепочки элементарных преобразований над столбцами, но в каждой из полос раздельно. Эти преобразования позволяют привести матрицу к некоторой канонической форме.

1005. Если $f(t)$ — минимальный аннулятор и $F(t)$ — какой-либо другой, поделить $F(t)$ на $f(t)$ с остатком и подставить A вместо t.

1007. Записать матрицу оператора в базисе, включающем базис инвариантного подпространства.

1008. В качестве базиса взять $x, Ax, \ldots, A^{k-1}x$.

1009. Достаточно показать, что характеристический полином делится на аннулятор любого вектора. Для этого нужно воспользоваться результатами задач 1007 и 1008.

1010. Взять в качестве базиса объединение базисов прямых слагаемых.

1011. Взять базис пространства, включающий базисы пересечения и обоих данных подпространств.

1012. Для $k = 2$ — следует из задачи 1011. Дальше — индукция.

1013. Воспользоваться задачами 1012 и 1008.

1014. Следует из предыдущей задачи.

1015. Воспользоваться коммутативностью значений полиномов от оператора.

1016. Воспользоваться существованием таких полиномов $g_1(t)$ и $g_2(t)$, что $f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) = 1$. Подставив вместо t оператор, применить к вектору x обе части полученного операторного равенства.

1017. Применить индукцию. При доказательстве единственности разложения учесть, что если $f_2(A)$ аннулирует $y_2, \ldots, f_k(A)$ аннулирует y_k, то $y_2+\ldots+y_k$ аннулируется оператором $f_2(A)\ldots f_k(A)$.

1018. Применить результат задачи 1017.

1019. Произведение этих характеристических полиномов равно f. Каждый является степенью φ_i в силу результата задачи 1014.

1021. Провести индукцию по размерности. Применить индукционное предположение к факторпространству по циклическому подпространству Q_1, порожденному вектором z_1, имеющим аннулятор максимальной степени. За векторы, порождающие циклические прямые слагаемые, принять z_1 и прообразы векторов факторпространств, порождающих его циклические прямые слагаемые. Каждый из этих прообразов z_i, $i=2, 3, \ldots$, «подправить» за счет слагаемых из Q_1 так, чтобы его аннулятор совпадал с аннулятором его образа в факторпространстве, используя результат предыдущей задачи.

1024. Следует из результатов задач 1023, 1021 и 1018.

1027. Для примарного пространства утверждение очевидно. Для общего случая воспользоваться результатами задач 1018 и 1026.

1029. Применить метод индукции. В качестве f_1 взять минимальный полином оператора и в качестве первой образующей — вектор, минимальный аннулятор которого равен f_1. Дальше — как в задаче 1021.

1033. a) Положить $\lambda=2\cos\theta$; b) выразить характеристический многочлен через характеристический многочлен примера a).

1042. Умножить матрицу на вектор $u_k=\left(1, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_k^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}$ $0 \leqslant k \leqslant n-1$, где $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ и при $\varepsilon_k \neq \pm 1$ рассмотреть подпространство, натянутое на вещественную и мнимую части вектора u_k.

1043. Прежде всего найти характеристические числа для квадрата матрицы. Затем для определения знаков при извлечении квадратного корня воспользоваться тем, что сумма характеристических чисел равна сумме элементов главной диагонали и что произведение характеристических чисел равно определителю. Применить результаты задач 207 и 381.

1044. Применить результат задачи 1043.

1053. Оператор ∂ обладает свойствами оператора дифференцирования ($\partial(uv)=\partial u\cdot v+u\cdot\partial v$), а бином $x-y$ для него является константой ($\partial(x-y)=0$).

1054. Выяснить число блоков. Оно равно размерности ядра оператора ∂, т. е. числу линейно независимых констант. Далее, положив $m \leqslant n$, среди однородных многочленов степеней $n+m-2$, $n+m-3, \ldots, n-1$ найти полином, аннулируемый возможно меньшими степенями ∂. Установить, что их можно принять за образующие циклических подпространств, дающих каноническое разложение.

1055. Пусть B коммутирует с A, x_0 — вектор, порождающий S. Тогда все векторы из S равны $f(A)x_0$ и поэтому, если известно значение B на векторе x_0, то оно известно и на всех других векторах.

1056. Если $A^\top = MAM^{-1}$, то

$$(C^{-1}AC)^\top = C^\top MC \cdot C^{-1}AC \cdot C^{-1}M^{-1}C^{-\top},$$

так что если оба утверждения верны для A, то они верны и для любой матрицы, подобной A. Поэтому предложение задачи достаточно доказать для матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$, ибо любая матрица подобна квазидиагональной, составленной из таких блоков. Преобразующую матрицу удобно искать из уравнения $A^\top M = MA$.

1057. Если $A = B_1B_2$, $B_1^\top = B_1$, $B_2^\top = B_2$ и B_2 невырождена, то $A^\top = B_2B_1 = B_2AB_2^{-1}$.

1059. Можно сослаться на теорему об одновременном приведении пары квадратичных форм, из которых одна положительно определена. Формально короче — доказать, что A подобна некоторой симметрической матрице.

1069. Нужно погрузить пространство S в комплексное пространство $\widetilde{S}$ и применить результат предыдущей задачи.

1070. Применяя задачу 1068 к пространству S и его факторпространствам, установить существование общего инвариантного полного фланга.

1075. Положим $G_C(X) = C^\top XC$. Легко проверяется, что $G_C^{-1}F_AG_C(X) = F_{CAC^{-1}}(X)$, так что подобным матрицам A соответствуют подобные операторы F_A.

1100. Наименьший угол следует искать среди углов, образованных векторами второй плоскости с их ортогональными проекциями на первую плоскость.

1101. Задать куб в системе координат с началом в центре и с осями, параллельными ребрам. Затем принять за оси четыре взаимно ортогональных диагонали.

1102. Использовать результат задачи 1092.

1104. Доказывать по индукции.

1105. Воспользоваться тем, что $V[A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_k] = V[A_1, \dots, A_m] \cdot V[B_1, \dots, B_k]$, если $A_i \perp B_j$, и результатом предыдущей задачи.

1117. Рассмотреть $(A(x+y), x+y) = (B(x+y), x+y)$.

1120. Составить AA^* и A^*A и сравнить следы левых верхних блоков.

1121. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

1124. Пусть $Ax=\lambda x$ и A нормален. Вычислить $(A^*x-\bar{\lambda}x, A^*x-\bar{\lambda}x)$.

1126. Вычислить $A^\top A-AA^\top$, положив $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ и рассмотреть порознь случаи $b=c$ и $b\neq c$.

1129. Воспользоваться существованием одномерного подпространства, инвариантного для попарно коммутирующих операторов (задача 1068).

1130. Воспользоваться существованием одномерного или двухмерного подпространства, инвариантного для попарно коммутирующих операторов (задача 1069).

1134. Взять ортонормированные базисы P и Q и каждый из них дополнить до ортонормированного базиса всего пространства.

1138. Рассмотреть флаг, составленный из инвариантных подпространств (см. задачу 1062).

1139. Прежде всего выяснить, что такое пара комплексно-сопряженных ортогональных столбцов.

1140. Для доказательства достаточности составить оператор A, переводящий e_i в g_i, $i=1, \ldots, n$, и проверить, что он сохраняет скалярные произведения.

1142. Пусть $e_i=(0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0)^\top$, $u_1^\top, \ldots, u_k^\top$ — данные первые строки, $v_1, \ldots, v_m$ — данные первые столбцы, A — искомый оператор. Принять во внимание, что $Au_i=e_i$, $i=1, \ldots, k$, и $Ae_j=v_j$, $j=1, \ldots, m$, и воспользоваться предыдущей задачей.

1143. Положив $B=P-(1+\cos\alpha)\,vu^\top$, показать прямым вычислением, что для ортогональности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы матрица P была ортогональна и $Pu=v$.

1144. Положить $U=A+iB$, где A и B — вещественные симметрические матрицы, и выяснить, что дает равенство $U^*U=E$.

1146. Составить $U^\top U$, представить ее в виде $B^\top B$, где $B=\Lambda P$, и доказать вещественность UB^{-1}.

1156. Взять в качестве базиса S нормированные собственные векторы самосопряженного оператора $A^*A\colon S\longrightarrow S$, выделив среди них те, которые отвечают ненулевым (и, следовательно, положительным) собственным значениям μ_i^2, $i=1, \ldots, k$.

1157. Первые два требования обозначают, что A^+ принадлежит к числу полуобратных операторов (задача 988). Последние два — что операторы A^+A и AA^+ являются операторами ортогонального проектирования.