ГЛАВА II

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действия над комплексными числами в компонентах

101. Вычислить $(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)$.

102. Вычислить

$$(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i).$$

103. $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$. Найти x и y, считая их вещественными.

104. Решить систему, считая x, y, z, t вещественными:

$$\begin{gathered}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i,\\ (3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i.\end{gathered}$$

105. Вычислить:

a) $(1+2i)^6$; b) $(2+i)^7+(2-i)^7$; c) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

106. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

107. Выполнить указанные действия:

a) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$; c) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}$; d) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

108. Решить системы уравнений:

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i$, $(4+2i)x-(2+3i)y=$ $=5+4i$;

b) $(2+i)x+(2-i)y=6$, $(3+2i)x+(3-2i)y=8$;

c) $x+yi-2z=10$, $x-y+2iz=20$,
$ix+3iy-(1+i)z=30$.

109. Вычислить:

a) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

*110. Пусть $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Вычислить:

a) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

c) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$;

111. Доказать, что $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$, если $x+yi = (s+ti)^n$.

112. Вычислить:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$;

e) $\sqrt{-11+60i}$; f) $\sqrt{-8-6i}$; g) $\sqrt{2-3i}$;

h) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; i) $\sqrt[4]{-1}$; j) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

113. Решить уравнения:

a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;

b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;

c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

*114. Решить уравнения и левые части их разложить на множители с вещественными коэффициентами:

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$; b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

115. Решить уравнения:

a) $x^4-3x^2+4=0$; b) $x^4-30x^2+289=0$.

116. Составить формулу для решения биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$ с вещественными коэффициентами, удобную для случая, когда $\frac{p^2}{4}-q<0$.

*117. Доказать, что $(\pm\sqrt{a}\pm i\sqrt{b})^n$ при целых положительных взаимно простых a и b не может быть вещественным, за исключением $(\pm 1 \pm i)^n$ (n делится на 4), $(\pm 1 \pm i\sqrt{3})^n$ (n делится на 3) и $(\pm\sqrt{3}\pm i)^n$ (n делится на 6).

§ 2. Геометрическое изображение и тригонометрическая форма

118. Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad -1+i, \quad 2-3i.$$

119. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$; f) $-1+i$;

g) $-1-i$; h) $1-i$; i) $-1-i\sqrt{3}$; j) $\sqrt{3}-i$.

*120. Представить в тригонометрической форме число $2+\sqrt{3}+i$.

121. Представить в тригонометрической форме число $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, считая $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

122. Пользуясь таблицами, представить в тригонометрической форме следующие числа:

a) $3+i$; b) $4-i$; c) $-2+i$.

123. Описать множество точек, изображающих комплексные числа:

а) модуль которых 1; б) аргумент которых $\frac{\pi}{6}$.

124. Описать множество точек, изображающих числа z, удовлетворяющие неравенствам:

a) $|z|<2$; b) $|z-i|\leqslant 1$; c) $|z-1-i|<1$.

***125.** Доказать, что всякое комплексное число z, отличное от -1, модуль которого 1, может быть представлено в форме $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, где t — вещественное число.

***126.** Пусть z проходит окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Представить наглядно перемещение точки $Rz+\rho z^n$, где $0<\rho<R$.

127. Как перемещается точка $\frac{1}{z}$, когда z описывает окружность с центром в точке $a+bi$ и с радиусом r.

128. Найти линию, по которой проходит точка z^2, если z обходит квадрат с вершинами в точках $-1-i$, $2-i$, $2+2i$, $-1+2i$.

***129.** Найти линию, по которой проходит точка $\frac{2aR}{z^2-a^2+R^2}$, когда z пробегает окружность $|z-a|=R$ (a — вещественное число).

130. Решить уравнение $|z|-z=a+bi$ и выяснить условие разрешимости.

131. Построить график функции $\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ от вещественной переменной x, $-\infty<x<\infty$.

132. Найти $\min|3+2i-z|$, считая $|z|\leqslant 1$.

133. Доказать тождество

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2\,(|x|^2+|y|^2);$$

какой геометрический смысл имеет это тождество?

134. z и z' — два комплексных числа, $u=\sqrt{zz'}$. Доказать, что

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|.$$

135. Показать, что если $|z| < \frac{1}{2}$, то

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

136. Выполнить действия:

a) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

b) $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi}$; c) $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$.

*137. Вычислить, пользуясь формулой Муавра:

a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

*138. Доказать, что:

a) $$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right);$$

b) $$(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right);$$

n — целое число.

139. Доказать, что $\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}$.

140. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, то

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta.$$

*141. Вычислить $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

142. Упростить $(1+\omega)^n$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

143. Извлечь корни:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-27}$.

144. Пользуясь таблицами, извлечь корни:

a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

145. Вычислить:

a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

146. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:

a) $\cos 5x$; b) $\cos 8x$; c) $\sin 6x$; d) $\sin 7x$.

147. Выразить $\mathrm{tg}\,6\varphi$ через $\mathrm{tg}\,\varphi$.

148. Составить формулы, выражающие $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

***149.** Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x:

a) $\sin^3 x$; b) $\sin^4 x$; c) $\cos^5 x$; d) $\cos^6 x$; e) $\sin^3 x \cos^5 x$.

***150.** Доказать, что:

a) $$2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

b) $$2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)x;$$

c) $$2^{2m}\sin^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

d) $$2^{2m}\sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin(2m-2k+1)x.$$

***151.** Доказать, что $\frac{\sin mx}{\sin x} = (2\cos x)^{m-1} - C_{m-2}^1 (2\cos x)^{m-3} + C_{m-3}^2 (2\cos x)^{m-5} - \ldots$

***152.** Выразить $\cos mx$ через $\cos x$.

***153.** Найти суммы:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

***154.** Найти сумму

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots$$

***155.** Доказать, что $(x+a)^m + (x+a\omega)^m + (x+a\omega^2)^m = 3x^m + 3C_m^3 x^{m-3}a^3 + \ldots + 3C_m^n x^{m-n}a^n$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, а n есть наибольшее целое число, кратное 3 и не превосходящее m.

156. Доказать, что

a) $$1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right);$$

b) $$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right);$$

c) $$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right).$$

***157.** Показать, что

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

158. Вычислить сумму $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

159. Вычислить сумму

$$1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\ldots+a^k\cos k\varphi.$$

160. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

161. Доказать, что если n — целое положительное, а θ — угол, удовлетворяющий условию $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$, то

$$\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta=n\sin n\theta.$$

162. Доказать, что если x меньше единицы по абсолютной величине, то ряды

a) $\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\ldots$
$\ldots+x^n\cos(\alpha+n\beta)+\ldots,$

b) $\sin\alpha+x\sin(\alpha+\beta)+x^2\sin(\alpha+2\beta)+\ldots$
$\ldots+x^n\sin(\alpha+n\beta)+\ldots$

сходятся и суммы соответственно равны

$$\frac{\cos\alpha-x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2},\quad \frac{\sin\alpha-x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}.$$

163. Найти суммы:

a) $\cos x+C_n^1\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x;$

b) $\sin x+C_n^1\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin(n+1)x.$

***164.** Найти сумму

$$\sin^2 x+\sin^2 3x+\ldots+\sin^2(2n-1)x.$$

165. Показать, что:

a) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x};$

b) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}.$

***166.** Найти суммы:

a) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\ldots+n\cos nx;$

b) $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots+n\sin nx.$

§ 3. Уравнения третьей и четвертой степени

167. Решить по формуле Кардано уравнения:

a) $x^3-6x+9=0;$ b) $x^3+12x+63=0;$

c) $x^3+9x^2+18x+28=0;$ d) $x^3+6x^2+30x+25=0;$

e) $x^3-6x+4=0;$ f) $x^3+6x+2=0;$

g) $x^3+3x^2-6x+4=0;$ h) $x^3+3x-2i=0;$

i) $x^3-6ix+4(1-i)=0;$ j) $x^3-3abx+a^3+b^3=0;$

k) $x^3-3abfgx+f^2ga^3+fg^2b^3=0.$

168. Доказать, что при решении кубических уравнений с рациональными коэффициентами по формуле Кардано все корни в формуле «извлекаются» в том и только в том случае, если корни уравнения имеют вид $2a$, $-a \pm bi\sqrt{3}$ при рациональных a и b.

***169.** Пользуясь таблицами, решить уравнения:

a) $x^3 - 4x - 1 = 0$; b) $x^3 - 4x + 2 = 0$.

***170.** Пользуясь формулой Кардано, доказать, что

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

(Выражение $-4p^3 - 27q^2$ называется дискриминантом уравнения $x^3 + px + q = 0$.)

171. Доказать, что

$$\sqrt[3]{a + bi} = \frac{u(a + bi) + u^2 i}{2a \sqrt[3]{a^2 + b^2}},$$

где u — корень уравнения $u^3 - 3(a^2 + b^2)u - 2b(a^2 + b^2) = 0$.

***172.** Вывести формулу для алгебраического решения уравнения

$$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - 2b = 0.$$

173. Решить уравнения:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$;
c) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$;
d) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
e) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 6 = 0$;
f) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 27x - 56 = 0$;
g) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$;
h) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$;
i) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0$;
j) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$;
k) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$;
l) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$;
m) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$;
n) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$.

174. Способ Феррари для решения уравнения четвертой степени $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ состоит в том, что левая часть представляется в виде

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} + \lambda - b\right)x^2 + \left(\frac{a\lambda}{2} - c\right)x + \left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right)\right]$$

и затем λ подбирается так, чтобы выражение в квадратных скобках было квадратом двучлена первой степени. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)=0,$$

т. е. λ должно быть корнем некоторого вспомогательного кубического уравнения. Найдя λ, раскладываем левую часть на множители.

Выразить корни вспомогательного уравнения через корни уравнения четвертой степени.

§ 4. Корни из единицы

175. Написать корни из единицы степени:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

176. Выписать первообразные корни из единицы степени:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

177. Показать, что число первообразных корней n-й степени из единицы четное, если $n>2$.

178. Для каждого корня a) 16-й; b) 20-й; c) 24-й степени из единицы указать показатель, которому он принадлежит.

179. Выписать «круговые полиномы» $X_n(x)$ для n, равного:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8;
i) 9; j) 10; k) 11; l) 12; m) 15; n) 105.

180. Написать полином $X_p(x)$, где p — простое число.

***181.** Написать полином $X_{p^m}(x)$, где p — простое число.

***182.** Найти сумму всех корней n-й степени из 1.

***183.** Вычислить $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^{n-1}$, где ε — корень n-й степени из 1.

***184.** Пусть ε — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить сумму $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

185. Найти суммы:

a) $\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$;

b) $\sin\frac{2\pi}{n}+2\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

***186.** Определить сумму первообразных корней:
a) 15-й; b) 24-й; c) 30-й степени из единицы.

***187.** Составить простейшее алгебраическое уравнение, корнем которого является длина стороны правильного 14-угольника, вписанного в круг радиуса 1.

188. Доказать, что

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(t+\varepsilon_k)^n-1}{t} = \prod_{k=1}^{n-1} [t^n-(\varepsilon_k-1)^n],$$

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

189. Показать, кто корни уравнения $\lambda(z-a)^n + \mu(z-b)^n = 0$, где λ, μ, a, b — комплексные, лежат на одной окружности, которая в частном случае может выродиться в прямую (n — натуральное число).

190. Решить уравнения:

a) $(x+1)^m-(x-1)^m=0$; b) $(x+i)^m-(x-i)^m=0$;

c) $x^n-nax^{n-1}-C_n^2a^2x^{n-2}-\ldots-a^n=0$.

191. Доказать, что если A — комплексное число, модуль которого 1, то уравнение

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A$$

имеет все корни вещественные и различные.

***192.** Решить уравнение

$$\cos\varphi + C_n^1\cos(\varphi+\alpha)\,x + C_n^2\cos(\varphi+2\alpha)\,x^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n\cos(\varphi+n\alpha)\,x^n = 0.$$

Доказать следующие теоремы:

193. Произведение корня степени a из 1 на корень степени b из 1 есть корень степени ab из 1.

194. Если a и b взаимно просты, то все корни степени ab из 1 получаются умножением корней степени a из 1 на корни степени b из 1.

195. Если a и b взаимно просты, то произведение первообразного корня степени a из 1 на первообразный корень степени b из 1 есть первообразный корень степени ab из 1 и обратно.

196. Доказать, что $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$, если a и b взаимно просты, пользуясь тем, что $\varphi(n)$ есть число первообразных корней степени n.

***197.** Доказать, что при n нечетном, большем 1, $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

198. Доказать, что если d составлено из простых делителей, входящих в n, то каждый первообразный корень из 1 степени nd есть корень степени d из первообразного корня n-й степени из 1 и обратно.

***199.** Доказать, что если $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, то $X_n(x) = X_{n'}(x^{n''})$, где

$$n'=p_1p_2\ldots p_k;\quad n''=\frac{n}{n'}.$$

***200.** Доказать, что коэффициенты полинома $X_{pq}(x)$, где p и q — неравные нечетные простые числа, равны 0, 1 или -1.

201. Доказать, что все полиномы $X_n(x)$ при $n\leqslant 104$ имеют коэффициенты 0, 1, -1.

202. Пусть p — простое число, не делящее n. Доказать, что

$$X_{pn}(x)=\frac{X_n(x^p)}{X_n(x)}.$$

203. Доказать, что сумма первообразных корней n-й степени из 1 равна функции Мёбиуса $\mu(n)$.

204. Доказать, что $X_n(x)=\prod(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, где d пробегает все делители n.

***205.** Найти $X_n(1)$.

***206.** Найти $X_n(-1)$.

***207.** $S=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}$, где ε — первообразный корень степени n из 1. Найти $|S|$.

§ 5. Показательная функция и натуральный логарифм

Показательная функция от комплексной переменной z определяется при помощи формулы Эйлера: $e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b)$. Из нее следует: $\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$, $\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$. Тригонометрическая форма комплексного числа: $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ превращается в $\alpha=re^{i\varphi}=e^{\ln r+i\varphi}$. Это делает естественным определение натурального логарифма: $\ln\alpha=\ln r+i\varphi$. Натуральный логарифм определен с точностью до целого кратного $2\pi i$.

***208.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n$.

209. Во что превращается в свете формулы Эйлера правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел? Тот же вопрос для формулы Муавра.

210. Вычислить: a) $e^{\pi i}$; b) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

211. Вычислить: a) $\ln(-1)$; b) $\ln(1+i)$.

212. Найти $\ln(x+i\sqrt{1-x^2})$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

213. Выразить $\operatorname{arctg} x$ через логарифмическую функцию.

§ 6. Некоторые обобщения

214. Пусть K — поле и $m \in K$ не является квадратом элемента из K. Рассмотрим множество пар (a, b) элементов $a, b \in K$, считая

1) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$,

2) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$,

3) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + mbd, ad + bc)$.

Доказать, что множество пар с таким определением действий образует поле K_1 (называемое квадратичным расширением поля K), в котором m является квадратом, именно $m = (0, 1)^2$. Пары $(a, 0)$ образуют подполе, изоморфное K, поэтому естественно не различать $a \in K$ и $(a, 0) \in K_1$. Любая пара записывается, при этом соглашении, в виде $a + bj$, где $j = (0, 1)$, $j^2 = m$.

215. Показать, что в квадратичном расширении поля $\mathrm{GF}(p)$, $p \geqslant 3$, содержится ровно p^2 элементов.

216. Показать, что конструкция, описанная в задаче 214, при применении к полю $\mathrm{GF}(p)$ приводит к изоморфным полям, независимо от выбора m.

217. Доказать, что все квадратичные расширения (в смысле задачи 214) поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел изоморфны полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

218. Доказать, что поле рациональных чисел имеет бесконечно много неизоморфных квадратичных расширений.