ГЛАВА III

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Действия над матрицами

219. Выполнить действия:

a) $(1, 2, 1, -1) + (3, 2, -1, 2)$;

b) $3(1, -1, 0, 3) + 2(-1, 2, 3, 1) - (1, 1, 6, 11)$;

c) $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

220. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

221. Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

***222.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$, α—вещественное число.

223. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $(1\ 2\ 3)$; d) $(1\ 2\ 3)$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

224. Вычислить $AA^\top$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а $A^\top$—матрица, транспонированная к A.

225. Проверить, что

$$(c_1, c_2, \ldots, c_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{km} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) + c_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}) + \ldots$$
$$\ldots + c_k(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{km}),$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \ldots + c_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{km} \end{pmatrix}.$$

226. Что представляют собой строки (столбцы) матрицы AB в терминах строк A и строк B (соответственно, столбцов A и столбцов B).

227. Что произойдет с матрицей, если ее умножить слева (справа) на матрицу вида

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & 1 & & & & & \\
& & & 0 & \dots & 1 & & \\
& & & \vdots & & \vdots & & \\
& & & 1 & \dots & 0 & & \\
& & & & & & 1 & \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

228. Что произойдет с матрицей, если ее умножить слева (справа) на матрицу вида

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & 1 & \dots & \alpha & \\
& & & \ddots & \vdots & \\
& & & & 1 & \\
& & & & & \ddots \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

229. Можно ли рассматривать действие «добавить к первой строке матрицы все остальные» как умножение (слева или справа?) на некоторую вспомогательную матрицу?

§ 2. Определители второго и третьего порядков

230. Доказать, что определитель второго порядка с элементами из поля равен нулю в том и только в том случае, если его строки пропорциональны.

231. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} a+bi & c+d \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} \cos\varphi+i\sin\varphi & 1 \\ 1 & \cos\varphi-i\sin\varphi \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$;

l) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; m) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$,

где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

232. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$,

где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

233. Определитель $\begin{vmatrix} \bar{5} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{7} \end{vmatrix}$ с элементами из поля вычетов по модулю 13 равен 0. Пропорциональны ли его строки?

234. Определитель $\begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{vmatrix}$ с элементами из кольца вычетов по модулю m равен нулю. Обязаны ли его строки быть пропорциональными?

§ 3. Перестановки

235. Выписать транспозиции, посредством которых от перестановки 1, 2, 4, 3, 5 можно перейти к перестановке 2, 5, 3, 4, 1.

236. Определить число инверсий в перестановках:

a) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5; b) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4; c) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

237. Подобрать i и k так, чтобы:

a) перестановка 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 была четной;

b) перестановка 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 была нечетной.

238. Определить число инверсий в перестановке n, $n-1$, ..., 2, 1.

239. В перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеется I инверсий. Сколько инверсий в перестановке $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

240. Определить число инверсий в перестановках:

a) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$;

b) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$.

***241.** Пусть u_n^k — число перестановок множества $N =$ $= \{1, 2, \ldots, n\}$, имеющих ровно k инверсий. Доказать что

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} u_n^k x^k =$$
$$= (1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+\ldots+x^{n-1}).$$

242. Доказать, что число инверсий в перестановке равно минимальному числу транспозиций соседних элементов, переводящих перестановку в натуральное расположение.

243. Умножить подстановки (первая действующая пишется слева и подстановки читаются сверху вниз):

a) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,3\,1\,4\,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 3\,1\,2\,5\,4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,4\,6\,7\,3\,2\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 4\,7\,6\,5\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$.

244. Разложить следующие подстановки на циклы:

a) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 3\,5\,2\,1\,6\,7\,4 \end{pmatrix}$;

c) (12) (13) (14) (15) (16).

245. Выполнить умножение

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}^{-1} (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

246. Разложить на циклы произведение

$$(12)(34)\dots(2n-1,\ 2n)\cdot(13)(25)(47)\dots$$
$$\dots(2n-4,\ 2n-1)(2n-2,\ 2n).$$

247. Сопоставим подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & \dots & n\sigma \end{pmatrix} = \sigma$ (через $k\sigma$ обозначается результат действия подстановки σ на элемент k) квадратную матрицу U_σ порядка n, у которой в i-й строке элемент $i\sigma$-го столбца равен 1, остальные — нули. Доказать, что

$$\text{a) } U_\sigma \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1\sigma} \\ z_{2\sigma} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n\sigma} \end{pmatrix}; \quad \text{b) } U_{\sigma_1} U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1\sigma_2}.$$

§ 4. Определение и простейшие свойства определителя

248. С каким знаком в определитель 6-го порядка входят произведения:

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?

(Первый индекс — номер строки, второй — номер столбца.)

249. Входят ли в определитель 5-го порядка произведения:

a) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$; b) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$?

250. Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком плюс.

251. Записать (пользуясь определением) определитель четвертого порядка в развернутой форме.

252. Выписать все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Что получится, если из их суммы вынести $a_{14}a_{23}$ за скобки?

253. С каким знаком входит в определитель n-го порядка произведение элементов главной диагонали?

254. С каким знаком входит в определитель n-го порядка произведение элементов второй диагонали?

255. Почему определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

равен нулю?

256. Вычислить определители:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Замечание. Во всех задачах, где из условия не виден порядок определителя и не сделано специальной оговорки, условимся считать его равным n.

*257. Доказать, что определитель n-го порядка, у которого каждый элемент a_{ik} является комплексно-сопряженным элементу a_{ki}, равен вещественному числу.

258. Доказать, что определитель нечетного порядка равен 0, если все элементы его удовлетворяют условию

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

(кососимметрический определитель).

259. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен Δ.

Чему равен определитель $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$?

260. Доказать, что если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

261. Как изменится определитель, если все столбцы его написать в обратном порядке?

262. Изменится ли определитель, если его матрицу транспонировать относительно второй диагонали?

263. Что произойдет с определителем, если его матрицу повернуть на 90° против часовой стрелки?

264. Упростить запись алгебраического дополнения A_{ij} для унитреугольной матрицы общего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*265. Числа 204, 527 и 255 делятся на 17. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

делится на 17.

266. Вычислить определители, разложив их по элементам строки (столбца), содержащей буквы:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

267. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

268. Упростить определитель $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$, разложив его на слагаемые.

269. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$.

270. Написать разложение определителя четвертого порядка по минорам первых двух строк.

271. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

пользуясь разложением по минорам второго порядка.

272. Пусть A, B, C, D—определители третьего порядка, составленные из матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

вычеркиванием соответственно первого, второго, третьего и четвертого столбцов. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD-BC.$$

§ 5. Вычисление определителей

*273. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$. 274. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

275. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

276. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

277. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

278. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

279. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

280. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

281. $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

282. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

283. $$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_5 & b_5 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_7 & b_7 & b_7 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_9 & b_9 & b_9 & b_{10} \end{vmatrix}.$$

284. $$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

285. $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}.$$

286. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

287. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

288. $$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

289. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}.$$

***290.** $$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\sin 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \sin 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\sin 4\varphi \end{vmatrix}.$$

291. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}.$$

***292.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

***293.** $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$ (порядка $2n$).

***294.** $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

***295.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

***296.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***297.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

298. $$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

***299.** $$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

***300.** $$\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_n \\ -1 & x & \dots & 0 & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+c_1 \end{vmatrix}.$$

301. $$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

302. $$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***303.** $$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***304.** $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***305.** $$\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a+b & (a+b)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+3b & (a+2b)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2a+(2n-1)b & (a+nb)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a+(2n+1)b \end{vmatrix}.$$

***306.** $$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

***307.**

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

308.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

***309.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & & a_n \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

310.

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

***311.**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***312.**

$$\begin{vmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}.$$

***313.**

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

***314.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***315.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

***316.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***317.**
$$\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \dots & C_m^{k+n} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \dots & C_{m+1}^{k+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n}^k & C_{m+n}^{k+1} & \dots & C_{m+n}^{k+n} \end{vmatrix}.$$

***318.**
$$\begin{vmatrix} C_{k+m}^m & C_{k+m+1}^m & \dots & C_{k+2m}^m \\ C_{k+m+1}^m & C_{k+m+2}^m & \dots & C_{k+2m+1}^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{k+2m}^m & C_{k+2m+1}^m & \dots & C_{k+3m}^m \end{vmatrix}.$$

***319.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

***320.**
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

321.
$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***322.**
$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***323.**
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

324.
$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

325.
$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

326. Доказать, что определитель суммы двух матриц A и B порядка n равен сумме всех 2^n определителей матриц, получающихся из A заменой части столбцов A соответствующими столбцами из B (включая сами матрицы A и B).

***327.** Вычислить

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 2a_2 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 2a_n \end{vmatrix}.$$

***328.** Пусть $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $C=(c_1, c_2, \dots, c_n)^{\mathsf{T}}$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} -$$

взаимная с A матрица. Доказать, что $\det(A+CB) = \det A + B\tilde{A}C$.

329. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1+c_1b_1 & c_1b_2 & \dots & c_1b_n \\ c_2b_1 & 1+c_2b_2 & \dots & c_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_nb_1 & c_nb_2 & \dots & 1+c_nb_n \end{vmatrix}.$$

***330.** Доказать, что

$$\det(A+D) = \sum_{\Gamma} d_{\Gamma} \det A^{\Gamma}.$$

Здесь D — диагональная матрица порядка n, Г пробегает все подмножества множества $N=\{1, 2, \dots, n\}$, включая N и пустое множество, d_{Γ} — произведение элементов D, номера которых составляют Г (принимается, что произведение пустого множества сомножителей равно 1), A^{Γ} — субматрица матрицы A, получающаяся вычеркиванием строк и столбцов с номерами, составляющими Г.

331. Записать $\det(A+xE)$ в виде полинома, расположенного по степеням x.

Вычислить определители:

***332.** $$\begin{vmatrix} 1+2a_1 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 1+2a_2 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 1+2a_n \end{vmatrix}.$$

333. $$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

*334. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & x_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & x_3 & \dots & a_nb_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & x_n \end{vmatrix}.$

335. $\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$

336. $\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_2a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$

*337. $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}.$

338. $\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}.$

339. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$

*340. $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$

*341. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$

*342. $\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h \end{vmatrix}.$

***343.**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

344.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***345.** Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & y_n \\ x_1 & \dots & x_n & z \end{vmatrix} = z \det A - X\tilde{A}Y,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\tilde{A}$ — взаимная с A матрица, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^{\top}$.

Вычислить определители:

346. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$

347. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & x_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix}.$

***348.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***349.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***350.** $\begin{vmatrix} a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & a_{n-2}x & b_{n-1} \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-2}x^2 & a_{n-1}x \end{vmatrix}.$

351.
$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***352.**
$$\begin{vmatrix} w_1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ w_2 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

353.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

354.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_k(x)=x^k+a_{1k}x^{k-1}+\dots+a_{kk}$.

355.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix},$$

где $\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1\cdot 2\dots k}$.

***356.** Доказать, что значение определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

при целых $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится на $1^{n-1}2^{n-2}\dots(n-1)$.

Вычислить определители:

357.
$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

358. $$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***359.**

$$\begin{vmatrix} a_1^{2n}+1 & a_1^{2n-1}+a_1 & a_1^{2n-2}+a_1^2 & \dots & a_1^{n+1}+a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^{2n}+1 & a_2^{2n-1}+a_2 & a_2^{2n-2}+a_2^2 & \dots & a_2^{n+1}+a_2^{n-1} & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}^{2n}+1 & a_{n+1}^{2n-1}+a_{n+1} & a_{n+1}^{2n-2}+a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n+1}+a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

***360.** $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 & \dots & \cos(n-1)\varphi_0 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos\varphi_{n-1} & \cos 2\varphi_{n-1} & \dots & \cos(n-1)\varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

***361.** $$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 & \dots & \sin\alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***362.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_n^2(x_n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

363. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***364.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & \dots & x_n^{s-1} \\ x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & \dots & x_n^{s+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***365.** $$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

*366. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (n+1)\,x^n \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & (n+1)^2\,x^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{n-1}x & 3^{n-1}x^2 & \dots & (n+1)^{n-1}x^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \end{vmatrix}.$

*367. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 x & \dots & C_{n-1}^1 x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2 x^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 y & \dots & C_{n-1}^1 y^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-k-1} y^k \end{vmatrix}.$

*368. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & nx^{n-1} \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & n^2x^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{k-1}x & 3^{k-1}x^2 & \dots & n^{k-1}x^{n-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & y_{n-k} & y_{n-k}^2 & \dots & y_{n-k}^{n-1} \end{vmatrix}.$

*369. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x-2n \end{vmatrix}.$

370. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$

*371. $$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

372. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

*373. Найти коэффициент при наименьшей степени x в определителе

$$\begin{vmatrix} (1+x)^{a_1b_1} & (1+x)^{a_1b_2} & \dots & (1+x)^{a_1b_n} \\ (1+x)^{a_2b_1} & (1+x)^{a_2b_2} & \dots & (1+x)^{a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1+x)^{a_nb_1} & (1+x)^{a_nb_2} & \dots & (1+x)^{a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

§ 6. Применение умножения матриц к вычислению определителей

374. Вычислить определитель Δ посредством умножения его на определитель δ:

a) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

b) $$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

c) $$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

375. Вычислить квадрат определителя:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

376. $$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,0} & a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} = D.$$

Чему равен
$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$
где $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{n-1,\,i}x^{n-1}$?

Вычислить определители:

*377. $$\begin{vmatrix} (b_0+a_0)^n & (b_1+a_0)^n & \dots & (b_n+a_0)^n \\ (b_0+a_1)^n & (b_1+a_1)^n & \dots & (b_n+a_1)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_0+a_n)^n & (b_1+a_n)^n & \dots & (b_n+a_n)^n \end{vmatrix}.$$

378. $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1} & \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2} & \dots & \dfrac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n} \\ \dfrac{1-\alpha_2^n\beta_1^n}{1-\alpha_2\beta_1} & \dfrac{1-\alpha_2^n\beta_2^n}{1-\alpha_2\beta_2} & \dots & \dfrac{1-\alpha_2^n\beta_n^n}{1-\alpha_2\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1} & \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2} & \dots & \dfrac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}.$$

379. $$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

*380. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$,

где $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

*381. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$,

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

*382. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$.

(циклический определитель)

383. Применить результат задачи 382 к задачам 321, 302, 344.

Вычислить определители:

384. $\begin{vmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & 1 \\ 1 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \\ C_{n-1}^{n-2} & 1 & 1 & \dots & C_{n-1}^{n-4} & C_{n-1}^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

385. $\begin{vmatrix} \overbrace{-1 & -1 & \dots & -1 & -1}^{p} & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1}^{n-p} \\ 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$.

386. $\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos\theta \end{vmatrix}$.

387. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0+3a_1+3a_2)(a_0^2-a_0a_1-a_0a_2+2a_1^2+2a_2^2-3a_1a_2)^3.$$

Вычислить определители:

388. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

(кососиклический определитель).

389. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \mu a_{n-1} & \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \mu a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

§ 7. Применение умножения матриц, разбитых на клетки, к вычислению определителей

*390. Доказать, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$, где A — произвольная квадратная матрица, равен нулю.

*391. Доказать, что $\det\begin{pmatrix} E_m & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CB)$. Здесь B и C — произвольные $m\times n$- и $n\times m$-матрицы, D — квадратная матрица порядка n.

*392. Доказать, что $\det(E_m + AB) = \det(E_n + BA)$. Здесь A — произвольная $m\times n$-матрица, B — произвольная $n\times m$-матрица.

*393. Доказать, что $\det(tE_n + BA) = t^{n-m}\det(tE_m + AB)$.

*394. Доказать, что если матрицы A и B коммутируют, то $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$.

395. Тензорным или кронекеровским произведением двух матриц A и B называется матрица, составленная из блоков $a_{ij}B$, где $A=(a_{ij})$. Обозначим ее $A\otimes B$. Доказать:

a) $(A_1\pm A_2)\otimes B=A_1\otimes B\pm A_2\otimes B$;

b) $A\otimes(B_1\pm B_2)=A\otimes B_1\pm A\otimes B_2$;

c) $cA\otimes B=A\otimes cB=c(A\otimes B)$;

d) $(A_1\otimes B_1)\cdot(A_2\otimes B_2)=A_1A_2\otimes B_1B_2$

(если указанные действия имеют смысл).

396. Вычислить $\det(A\otimes B)$. Здесь A и B — квадратные матрицы порядков m и n.

***397.** Пусть матрица C порядка mn разбита на n^2 равных квадратных клеток. Пусть матрицы A_{ik}, образованные элементами отдельных клеток, попарно коммутируют при умножении. Из матриц A_{ik} составляется «определитель» $\sum\pm A_{1\alpha_1}A_{2\alpha_2}\ldots A_{n\alpha_n}=B$. Этот «определитель» есть некоторая матрица порядка m. Доказать, что определитель матрицы C равен определителю матрицы B.

***398.** Для матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ положим $A'=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$. Ясно, что $A+A'=(a+d)E$; $AA'=A'A=(ad-bc)E$; $(A+B)'=A'+B'$; $(AB)'=B'A'$.

Выполнить умножение матриц четвертого порядка $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}A' & C'\\ B' & D'\end{pmatrix}$ и получить формулу для $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ в терминах матриц A, B, C, D.

***399.** В обозначениях предыдущей задачи доказать, что если сумма диагональных элементов матрицы $U=AC'+BD'$ равна нулю, то

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A' & C'\\ B' & D'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}D & C\\ B & A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}D' & B'\\ C' & A'\end{pmatrix}=\Delta E,$$

где $\Delta=\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$.