ГЛАВА IV

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЦЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Системы линейных уравнений, случай однозначной разрешимости

Решить системы уравнений:

400. a) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4,\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11,\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1,\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4,\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31,\\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1,\\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4,\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4; \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6,\\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8; \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1,\\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5; \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5,\\ x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= -4,\\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 &= 12,\\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad &= 5; \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned}2x_1-x_2+3x_3+2x_4&=4,\\3x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=6,\\3x_1-x_2-x_3+2x_4&=6,\\3x_1-x_2+3x_3-x_4&=6;\end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\x_1+3x_2+6x_3+10x_4&=0,\\x_1+4x_2+10x_3+20x_4&=0;\end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\x_1+2x_2+3x_3&=2,\\x_2+2x_3+3x_4&=-2,\\x_3+2x_4+3x_5&=2;\end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned}x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5&=-1,\\2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=8,\\3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=3,\\4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5&=-2,\\x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5&=-3.\end{aligned}$$

+ ***401.**
$$\begin{aligned}x_2+x_3+\ldots+x_n&=0,\\x_1+x_3+\ldots+x_n&=1,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}&=n-1.\end{aligned}$$

***402.**
$$\begin{aligned}x_2+x_3+\ldots+x_{2m}&=y_1,\\-x_1+x_3+\ldots+x_{2m}&=y_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\-x_1-x_2-\ldots-x_{2m-1}\phantom{+x_{2m}}&=y_{2m}.\end{aligned}$$

***403.** Решить систему уравнений
$$\begin{aligned}x_1x_2^2x_3^3&=2,\\x_1^2x_2^3x_3^4&=4,\\x_1^2x_2x_3&=2,\end{aligned}$$
считая x_1, x_2, x_3 положительными.

404. Доказать, что система уравнений
$$\begin{aligned}x_1^{a_{11}}\ldots x_n^{a_{1n}}&=c_1,\\\ldots\ldots\ldots&\\x_1^{a_{n1}}\ldots x_n^{a_{nn}}&=c_n,\end{aligned}$$
в предположении, что $c_1\ldots,c_n$ положительны и $\det(a_{ij})\neq0$, имеет единственное решение в положительных числах.

405. Доказать, что решение задачи 404 рационально, если $a_{ij}\in\mathbb{Z}$, $\det(a_{ij})=\pm1$ и $c_1,\ldots,c_n$ — положительные рациональные числа.

Решить системы уравнений:

406.
$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,\\
&x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = t,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = t^{n-1},
\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все различны.

407.
$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{b_1-\beta_1} + \frac{x_2}{b_1-\beta_2} + \ldots + \frac{x_n}{b_1-\beta_n} = 1,\\
&\frac{x_1}{b_2-\beta_1} + \frac{x_2}{b_2-\beta_2} + \ldots + \frac{x_n}{b_2-\beta_n} = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_1}{b_n-\beta_1} + \frac{x_2}{b_n-\beta_2} + \ldots + \frac{x_n}{b_n-\beta_n} = 1,
\end{aligned}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ все различны.

408. a)
$$\begin{aligned}
2x + y - z &\equiv 1,\\
x + 2y + z &\equiv 2, \qquad (\mathrm{mod}\ 5);\\
-x + y - z &\equiv -1
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
3x + 2y + 5z &\equiv 1,\\
2x + 5y + 3z &\equiv 3, \qquad (\mathrm{mod}\ 17).\\
5x + 3y + 2z &\equiv 4
\end{aligned}$$

409. Доказать, что если определитель системы уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

($a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}$) взаимно прост с натуральным числом m, то система сравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \equiv b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\mathrm{mod}\ m)\\
&a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \equiv b_n
\end{aligned}$$

имеет единственное решение в кольце $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю m.

§ 2. Обратная матрица

410. Обратить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

411. Найти матрицу X из уравнения

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

***412.** Решить системы (в матрицах второго порядка)

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

413. Обратить матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

414. Известно, что невырожденную матрицу можно преобразовать в единичную при помощи элементарных преобразований над строками. Доказать, что если те же преобразования выполнить над единичной матрицей, то в результате получится обратная.

Обратить матрицы:

415. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

416. $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

417. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2n-2} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

***418.** $$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

***419.** $$\begin{pmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{pmatrix}.$$

***420.** $$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}.$$

***421.** Матрица называется циклической, если все ее строки получаются из первой круговой подстановкой, смещающей элементы вправо. Доказать, что матрица, обратная к циклической, тоже циклическая.

422. Обратить матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 \\ 2n-1 & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3 \\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & 3 & \dots & 2n-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

***423.** Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

называется обобщенно циклической. Доказать, что матрица, обратная к обобщенно циклической, тоже обобщенно циклическая.

424. Обратить матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ b & 0 & a & \dots & a \\ b & b & 0 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

425. Доказать, что если A — нильпотентная матрица, т. е. такая, что $A^k=0$ при некотором натуральном k, то $(E-A)^{-1}=E+A+\dots+A^{k-1}$.

426. Найти последовательные степени матрицы

$$U=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и применить результат к обращению матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратить матрицы:

427. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$ **428.** $\begin{pmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ 0 & a & b & \ldots & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{pmatrix}.$

429. Доказать, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

430. Применить результат предыдущей задачи к обращению матриц

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & a & a & \ldots & a \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & a & a & . & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & a & a & \ldots & a \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$

***431.** Пусть B и C — соответственно $n \times m$- и $m \times n$-матрицы. Доказать, что для матрицы $E_n + BC$ существует обратная, если обратима матрица $E_m + CB$, и $(E_n + BC)^{-1} = E_n - B(E_m + CB)^{-1}C$.

***432.** Пусть A — квадратная матрица порядка n, для которой A^{-1} известна; B и C — соответственно $n \times m$- и $m \times n$-матрицы. Доказать, что для матрицы $A + BC$ существует обратная, если обратима матрица $E_m + CA^{-1}B$, и $(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(E_m + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$.

Обратить матрицы:

***433.** $$\begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

***434.** $$\begin{pmatrix} 1+2a_1 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 1+2a_2 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 1+2a_n \end{pmatrix}.$$

***435.** $$\begin{pmatrix} 1+\lambda_1^{-1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2^{-1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda_3^{-1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

436. Пусть A — квадратная матрица порядка n, для которой обратная A^{-1} известна; B, C и D — соответственно $n\times m$-, $m\times n$- и $m\times m$-матрицы. Доказать, что $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$ существует в том и только в том случае, если существует $T=(D-CA^{-1}B)^{-1}$, и

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BTCA^{-1} & -A^{-1}BT \\ -TCA^{-1} & T \end{pmatrix}.$$

Обратить матрицы:

437. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a \end{pmatrix}.$$

***438.** $$\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & \dots & 3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

***439.** Доказать, что если матрицу повернуть на 90°, то обратная матрица тоже повернется на 90° в обратную сторону.

***440.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — единственные решения систем линейных уравнений

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, & & a_{11}y_1 + \ldots + a_{n1}y_n = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{и} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & & a_{1n}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = c_n. \end{matrix}$$

Доказать, что $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + \ldots + b_ny_n$ и записать это число в терминах определителей.

§ 3. Ранг матрицы. Линейные системы общего вида

441. Как может измениться ранг матрицы, если к ней приписать одну строку? Одну строку и один столбец?

442. Найти ранги матриц:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить системы уравнений:

443.

a) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\ x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5&=0,\\ x_1+x_2+4x_3+4x_4+9x_5&=0,\\ x_1-x_2+8x_3-8x_4+27x_5&=0,\\ x_1+x_2+16x_3+16x_4+81x_5&=0;\end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3&=0,\\ 3x_1-5x_2+4x_3&=0,\\ x_1+17x_2+4x_3&=0;\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5&=0,\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=0,\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5&=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5&=0;\end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4&=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4&=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4&=0,\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4&=0;\end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=0,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5&=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5&=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0;\end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1+x_2-3x_4-x_5&=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5&=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5&=0.\end{aligned}$

444.

a) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4&=1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4&=-1,\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4&=5;\end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3&=-1,\\ 2x_1+x_2-2x_3&=1,\\ x_1+x_2+x_3&=3,\\ x_1+2x_2-3x_3&=1;\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -6; \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3; \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3; \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 3; \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1; \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 &= -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 1; \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$

445. Система

$$\begin{aligned} ay + bx &= c, \\ cx + az &= b, \\ bz + cy &= a \end{aligned}$$

имеет единственное решение. Доказать, что $abc \neq 0$, и найти решение.

446. Подобрать λ так, чтобы система уравнений имела решение:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

447. Решить и исследовать системы линейных уравнений (относительно неизвестных x, y, z):

a) $$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1, \\ x + \lambda y + z &= \lambda, \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} ax + y + z &= 4, \\ x + by + z &= 3, \\ x + 2by + z &= 4; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} ax + by + z &= 1, \\ x + aby + z &= b, \\ x + by + az &= 1; \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} (\lambda+3)x + y + 2z &= \lambda, \\ \lambda x + (\lambda-1)y + z &= 2\lambda, \\ 3(\lambda+1)x + \lambda y + (\lambda+3)z &= 5; \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \lambda x + \lambda y + (\lambda+1)z &= \lambda, \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda-1)z &= \lambda, \\ (\lambda+1)x + \lambda y + (2\lambda+3)z &= 1; \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1, \\ ax + (2b-1)y + 3z &= 1, \\ ax + by + (b+3)z &= 2b-1. \end{aligned}$$

***448.** Пусть линейные системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m &= c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m &= c_n \end{aligned}$$

обе совместны и пусть $x_1^*, \ldots, x_n^*$ и $y_1^*, \ldots, y_m^*$ — какие-либо решения этих систем. Доказать, что $b_1y_1^* + \ldots + b_my_m^* = c_1x_1^* + \ldots + c_nx_n^*$ и что это число не зависит от выбора решений систем.

449. Выписать фундаментальные системы решений для систем линейных однородных уравнений:

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0; \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

d) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

450. Для системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &+ a_{1,\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\ x_2 \qquad &+ a_{2,\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_m &+ a_{m,\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}$$

написать фундаментальную систему решений, полагая по очереди одно из значений $x_{m+1}, \ldots, x_n$ равным 1, остальные нулю.

***451.** Пусть B — квадратная матрица порядка n, ее первые m строк составляют матрицу C ранга m, последние $n-m$ строк образуют фундаментальную систему решений однородной системы с матрицей C. Показать, что миноры m-го порядка, составленные из матрицы C, пропорциональны своим алгебраическим дополнениям в матрице B.

452. Найти все решения матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

453. Найти все решения уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

454. Найти все решения задачи 453, удовлетворяющие требованию

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = X.$$

***455.** Доказать, что каждая $m\times n$-матрица A с элементами из данного поля K может быть представлена в виде PRQ, где P и Q — невырожденные матрицы, а R имеет вид $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где r — ранг матрицы A.

***456.** Доказать разрешимость матричного уравнения $AXA = A$ для любой прямоугольной матрицы A.

457. Доказать разрешимость системы матричных уравнений $AXA = A$, $XAX = X$ для любой прямоугольной матрицы A. (Матрица X, удовлетворяющая этим требованиям, называется полуобратной для A.)

458. Доказать, что каждая матрица ранга 1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_1c_1 & \ldots & b_1c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_mc_1 & \ldots & b_mc_n \end{pmatrix} = B^{\top}C$$

где $B=(b_1, \ldots, b_m)$, $C=(c_1, \ldots, c_n)$.

***459.** Найти все полуобратные матрицы для данной матрицы ранга 1.

***460.** Доказать, что для того чтобы прямоугольная матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A — квадратная невырожденная матрица порядка r, имела ранг r, необходимо и достаточно, чтобы $D=CA^{-1}B$, так что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} (E_r, A^{-1}B).$$

461. Доказать, что если A есть $m \times n$-матрица ранга m, то ее полуобратные матрицы и только они удовлетворяют уравнению $AX=E_m$ (аналогично, для $m \times n$-матрицы ранга n полуобратные матрицы характеризуются равенством $XA=E_n$).

***462.** Пусть A — прямоугольная матрица, A^- — ее полуобратная. Доказать, что если система $AX=B$ совместна, то одним из решений является A^-B.

***463.** Доказать, что матричное уравнение $AXB=C$ разрешимо, если разрешимы уравнения $AY=C$ и $ZB=C$.

§ 4. Алгебра матриц

464. Доказать, что если $AB=BA$, то

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

b) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$;

c) $(A+B)^n=A^n+\frac{n}{1}A^{n-1}B+\ldots+B^n$.

465. Вычислить $AB-BA$, если:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

*466. Пусть матрицы A и B таковы, что матрица $C = AB - BA$ коммутирует с матрицами A и B. Доказать, что $(A+B)^n = (A+B)_n - \frac{n(n-1)}{2} C (A+B)_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} C^2 (A+B)_{n-4} - \ldots$ Здесь $(A+B)_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$.

467. Вычислить $AB - BA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

468. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

469. Доказать, что если $AB = BA$, то $A^{-1}B = BA^{-1}$.

470. Найти $f(A)$:

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

471. Доказать, что каждая матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

*472. Доказать, что матричное равенство $AB - BA = E$ с элементами из числового поля невозможно.

*473. Построить пару квадратных матриц порядка p с элементами из поля $GF(p)$ так, чтобы $AB - BA = E$.

*474. Доказать, что если все диагональные элементы матрицы C равны 0, то существуют матрицы A и B такие, что $AB - BA = C$ (предполагается, что поле содержит бесконечно много элементов).

475. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.

476. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

477. Решить и исследовать уравнение $X^2=A$, где A — данная и X — искомая матрицы второго порядка.

478. Установить изоморфизм поля комплексных чисел и множества матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ при вещественных a, b.

479. Установить, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ при вещественных a, b, c, d образуют кольцо, не имеющее делителей нуля.

480. Вычислить $\varphi(A)$, где $\varphi(x)=\frac{1+x}{1-x}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

481. Найти все вещественные матрицы второго порядка, кубы которых равны единичной матрице.

482. Найти все вещественные матрицы второго порядка, четвертые степени которых равны единичной матрице.

***483**. Пусть A и B — соответственно $m\times n$- и $n\times k$-матрицы. Доказать, что ранг AB не меньше r_A+r_B-n, где r_A и r_B — ранги матриц A и B.

***484**. Найти все матрицы третьего порядка, квадраты которых равны 0.

***485**. Найти все матрицы третьего порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

***486**. Доказать, что невырожденная квадратная матрица, все угловые (от левого верхнего угла) главные миноры которой отличны от нуля, может быть представлена в виде произведения левой треугольной матрицы с единичной диагональю на правую треугольную.

***487**. Доказать, что любая невырожденная матрица A может быть представлена в виде QPR, где Q — правая треугольная матрица с единичной диагональю, P — матрица подстановки, R — тоже правая треугольная.

***488**. Доказать единственность разложения, описанного в задаче 487.

489. Найти условие, которому должна удовлетворять матрица с целыми элементами для того, чтобы все элементы обратной матрицы были целыми.

***490**. Доказать, что каждая целочисленная унимодулярная матрица второго порядка может быть представлена в виде произведения матрицы $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ и степеней (положительных и отрицательных) матрицы $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

491. Доказать, что каждая целочисленная унимодулярная матрица второго порядка с определителем 1 может быть представлена в виде произведения степеней (положительных и отрицательных) матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

492. Доказать, что каждая неособенная целочисленная матрица может быть представлена в виде PR, где P — целочисленная унимодулярная матрица, R — целочисленная правая треугольная матрица, диагональные элементы которой положительны, а элементы, лежащие выше главной диагонали, неотрицательны и меньше диагональных элементов того же столбца.

***493**. Объединим в один класс все целочисленные матрицы, получающиеся одна из другой умножением слева на целочисленные унимодулярные матрицы. Подсчитать число классов матриц n-го порядка с данным определителем $k>0$.

494. Доказать, что каждая целочисленная матрица может быть представлена в виде PRQ, где P и Q — целочисленные унимодулярные матрицы, R — целочисленная диагональная матрица.

495. Умножить матрицу $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$ на транспонированную и применить теорему об определителе произведения.

496. Используя умножение прямоугольных матриц, доказать тождество

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=\sum_{i<k}(a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

497. Доказать тождество

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b}_i\right|^2=\sum_{i<k}|a_ib_k-a_kb_i|^2.$$

Здесь a_i, b_i — комплексные числа, $\overline{b}_i$ — числа, сопряженные с b_i.

498. Доказать неравенство Коши — Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

для вещественных a_i, b_i, исходя из тождества задачи 496.

499. Доказать неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

для комплексных a_i, b_i.

500. Выразить минор m-го порядка произведения двух матриц через миноры множителей.

501. Чему равны главные миноры матрицы $A^\top A$.

502. Выразить сумму главных миноров порядка k матрицы $A^\top A$ (матрицы $AA^\top$) через миноры матрицы A.

*503. Записать сумму квадратов всех миноров всех порядков матрицы A (включая определитель «пустой субматрицы», который считается равным 1) в виде определителя.

504. Пусть прямоугольная матрица разделена горизонтальной линией на две субматрицы: $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ и пусть строки матрицы C ортогональны строкам B, т. е. выполнено соотношение $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{jk} = 0$. Доказать, что $\det AA^\top = \det BB^\top \det CC^\top$.

*505. Пусть A — вещественная квадратная матрица, $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$. Доказать, что $(\det A)^2 \leqslant \det BB^\top \det CC^\top$.

*506. Пусть A — вещественная прямоугольная матрица, $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$. Доказать, что $\det AA^\top \leqslant \det BB^\top \det CC^\top$.

507. Пусть A — прямоугольная вещественная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $\det AA^\top \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \dots \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2$.

***508.** Распространить надлежащим образом неравенства задач 505—507 на матрицы с комплексными элементами.

509. Доказать, что если $|a_{ik}| \leqslant M$, то модуль определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не превосходит $M^n n^{n/2}$.

***510.** Доказать, что если a_{ik} вещественны и лежат на отрезке $0 \leqslant a_{ik} \leqslant M$, то абсолютная величина определителя, составленного из чисел a_{ik}, не превосходит $M^n 2^{-n}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}$.

511. Доказать, что для определителей с комплексными элементами оценка, приведенная в задаче 509, точная и не может быть улучшена.

512. Доказать, что для определителей с вещественными элементами оценка, приведенная в задаче 509, точная при $n=2^m$.

***513.** Доказать, что максимум абсолютной величины определителей порядка n, имеющих вещественные элементы, не превосходящие 1 по абсолютной величине, есть целое число, делящееся на 2^{n-1}.

514. Найти максимум абсолютной величины определителей порядков 3 и 5, образованных из вещественных чисел, не превосходящих 1 по абсолютной величине.

***515.** Матрицей, ассоциированной с данной матрицей A, называется матрица, элементами которой являются миноры $(n-1)$-го порядка исходной матрицы в естественном расположении. Доказать, что матрица, ассоциированная к ассоциированной, равна исходной матрице, умноженной на ее определитель в степени $n-2$.

***516.** Доказать, что миноры m-го порядка матрицы A^{-1} равны алгебраическим дополнениям соответствующих миноров матрицы $A^{\top}$, деленным на $\det A$.

517. Доказать, что миноры m-го порядка ассоциированной матрицы равны дополнительным минорам к соответствующим минорам исходной матрицы, умноженным на Δ^{m-1}, где Δ — определитель исходной матрицы.

518. Доказать, что матрица, ассоциированная к произведению двух матриц, равна произведению ассоциированных матриц в том же порядке.

519. Пусть каким-либо способом занумерованы все сочетания из номеров $1, 2, \ldots, n$, взятых по m.

Дана квадратная матрица $A = (a_{ik})$ порядка n. Пусть $A_{\alpha\beta}$ есть минор m-го порядка матрицы A, номера строк которого образуют сочетание с номером α, номера столбцов — сочетание с номером β. Тогда из всех таких миноров можно построить матрицу $A^{[m]} = (A_{\alpha\beta})$ порядка C_n^m. В частности $A^{[1]} = A$, $A^{[n-1]}$ есть матрица, ассоциированная с A.

Доказать, что $(AB)^{[m]} = A^{[m]}B^{[m]}$, $E^{[m]} = E$, $(A^{-1})^{[m]} = (A^{[m]})^{-1}$.

520. Доказать, что если A есть правая треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то при надлежащей нумерации сочетаний (см. задачу 519) матрица $A^{[m]}$ будет также правой треугольной.

***521.** Доказать, что $\det A^{[m]} = (\det A)^{C_{n-1}^{m-1}}$.

522. Доказать, что любые наперед заданные числа можно принять за алгебраические дополнения первой строки некоторой квадратной матрицы.

***523.** Доказать, что любая матрица ранга 1 является ассоциированной для некоторой матрицы.

***524.** Доказать, что любые целые числа можно принять за алгебраические дополнения первой строки некоторой целочисленной квадратной матрицы.

***525.** Доказать, что любая целочисленная матрица ранга 1 является ассоциированной для некоторой целочисленной матрицы.

***526.** Доказать, что любые целые взаимно простые числа можно принять за первую строку целочисленной матрицы с определителем 1.

§ 5. Квадратичные формы и симметрические матрицы

527. Преобразовать к сумме квадратов квадратичные формы:

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

c) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

d) $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+$
$$+2x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2-2x_4^2;$$

e) $x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$.

528. Преобразовать квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i<k} x_ix_k$$

к диагональному виду.

529. Преобразовать к диагональному виду квадратичную форму

$$\sum_{i<k} x_ix_k.$$

***530.** Доказать, что положительно определенная форма может быть приведена к каноническому виду посредством преобразования с правой треугольной матрицей.

***531.** Доказать, что если к положительно определенной квадратичной форме добавить квадрат линейной формы, то ее дискриминант увеличится.

***532.** Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_{11}x_1^2+\ldots$ — положительно определенная квадратичная форма,

$$\varphi(x_2, \ldots, x_n)=f(0, x_2, \ldots, x_n),$$

D_f и D_φ — их дискриминанты. Доказать, что

$$D_f\leqslant a_{11}D_\varphi.$$

533. Пусть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$
$$=l_1^2+l_2^2+\ldots+l_p^2-l_{p+1}^2-l_{p+2}^2-\ldots-l_{p+q}^2,$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ — вещественные линейные формы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что число положительных квадратов при каноническом представлении формы f не превосходит p, число отрицательных квадратов не превосходит q.

***534.** Если квадратичные формы

$$\begin{aligned} f=a_{11}x_1^2&+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+\\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{2n}x_2x_n+\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{1n}x_1x_n + \\ + b_{21}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \ldots + b_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

положительно определены, то форма

$$\begin{aligned}(f, \varphi) = a_{11}b_{11}x_1^2 + a_{12}b_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}b_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}b_{21}x_2x_1 + a_{22}b_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}b_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}b_{n1}x_nx_1 + a_{n2}b_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}b_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

положительно определена.

535. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичные формы:

a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
b) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
c) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
e) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
f) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;
g) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;
h) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$;
i) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$;
j) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$;
k) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;
l) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;
m) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$;
n) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

536. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичные формы:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<k} x_ix_k$; b) $\sum\limits_{i<k} x_ix_k$.

537. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием форму

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n.$$

538. Доказать, что если все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A лежат на отрезке $[a, b]$, то квадратичная форма с матрицей $A - \lambda E$ отрицательно определена при $\lambda > b$ и положительно определена при $\lambda < a$. Справедлива и обратная теорема.

539. Доказать, что если все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A лежат на отрезке $[a, c]$ и все характеристические числа вещественной симметрической матрицы B лежат на отрезке $[b, d]$, то все характеристические числа матрицы $A+B$ лежат на отрезке $[a+b, c+d]$.

540. Доказать, что всякая вещественная неособенная матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и треугольной вида

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

с положительными диагональными элементами b_{ii} и такое представление единственно.

***541.** Доказать, что для любой положительно определенной матрицы A (т. е. матрицы положительно определенной квадратичной формы) существует арифметический квадратный корень, т. е. положительно определенная матрица B, квадрат которой равен A.

542. Доказать, что всякая вещественная неособенная матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и положительно определенной матрицы.

***543.** Доказать, что вещественная неособенная матрица с ненулевыми угловыми главными минорами представляется в виде произведения симметрической положительно определенной матрицы и правой треугольной.

544. Доказать, что если A — вещественная кососимметрическая матрица, то матрица $B=(E-A)(E+A)^{-1}$ ортогональна.

545. Преобразовать к каноническому виду уравнения поверхностей второго порядка:

a) $4x_1x_2+x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2-4x_1-2x_2-5=0$;
b) $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)-x_1x_2x_3=0$;
c) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2-$
$-4x_1+5x_2+5x_3+13=0$;
d) $x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2-2x_1=0$;
e) $4x_1x_3-x_2^2=0$;
f) $x_1x_4-x_2x_3+x_1+x_2+x_3+x_4=0$.