ГЛАВА V

АЛГЕБРА ПОЛИНОМОВ

§ 1. Элементарные действия над полиномами. Простые и кратные корни

546. Выполнить деление с остатком:

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;
b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

547. При каком условии полином $x^3 + px + q$ делится на полином вида $x^2 + mx - 1$?

548. При каком условии полином $x^4 + px^2 + q$ делится на полином $x^2 + mx + 1$?

549. Выполнить деление с остатком:

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;
b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$;
c) $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$;
d) $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$.

550. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad x_0 = 4$;
b) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \ x_0 = -2 - i$.

551. Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x)$ по степеням $x - x_0$:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1$;
b) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1$;
c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2$;
d) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad x_0 = -i$;
e) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i, \quad x_0 = -1 + 2i$.

552. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

a) $\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$; b) $\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$.

*553. Посредством схемы Горнера разложить по степеням x:

a) $f(x+3)$, где $f(x)=x^4-x^3+1$;

b) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$.

554. Найти значения полинома $f(x)$ и его производных при $x=x_0$:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10,\quad x_0=2$;

b) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1,\quad x_0=1+2i$.

555. Чему равен показатель кратности корня:

a) 2 для полинома $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

b) -2 для полинома $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

556. Определить коэффициент a так, чтобы полином x^5-ax^2-ax+1 имел -1 корнем не ниже второй кратности.

557. Определить A и B так, чтобы трехчлен Ax^4+Bx^3+1 делился на $(x-1)^2$.

558. Определить A и B так, чтобы трехчлен $Ax^{n+1}+$ $+Bx^n+1$ делился на $(x-1)^2$.

559. Доказать, что полиномы:

a) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$;

b) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$;

c) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$

имеют число 1 тройным корнем.

560. Доказать, что полином

$$x^{2n+1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2}+\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1}-$$
$$-\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}-1$$

делится на $(x-1)^5$ и не делится на $(x-1)^6$.

*561. Доказать, что для того чтобы полином

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

делился на $(x-1)^{k+1}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} a_0+a_1+\ a_2+\ \dots +\ \ a_n&=0,\\ a_1+2a_2+\ \dots +n\,a_n&=0,\\ a_1+4a_2+\ \dots +n^2a_n&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ a_1+2^ka_2+\ \dots +n^ka_n&=0. \end{aligned}$$

562. Определить показатель кратности корня a полинома

$$\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a),$$

где $f(x)$ — полином.

563. Найти условие, при котором полином x^5+ax^3+b имеет двойной корень, отличный от нуля.

564. Найти условие, при котором полином x^5+10ax^3+ $+5bx+c$ имеет тройной корень, отличный от нуля.

565. Доказать, что трехчленный полином $x^n+ax^{n-m}+b$ не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности.

566. Найти условие, при котором трехчленный полином $x^n+ax^{n-m}+b$ имеет двойной корень, отличный от нуля.

***567.** Доказать, что k-членный полином

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\dots+a_kx^{p_k}$$

не имеет корней выше $(k-1)$-й кратности, отличных от нуля.

***568.** Доказать, что каждый отличный от нуля корень $(k-1)$-й кратности полинома $a_1x^{m_1}+a_2x^{m_2}+\dots$ $\dots+a_kx^{m_k}$ удовлетворяет уравнениям $a_1x^{m_1}\varphi'(m_1)=$ $=a_2x^{m_2}\varphi'(m_2)=\dots=a_kx^{m_k}\varphi'(m_k)$, где $\varphi(t)=(t-m_1)\times$ $\times(t-m_2)\dots(t-m_k)$.

***569.** Доказать, что полином делится на свою производную в том и только в том случае, когда он равен $a_0(x-x_0)^n$.

+ **570.** Доказать, что полином

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

571. Доказать, что для того чтобы x_0 было корнем кратности k числителя дробной рациональной функции

$f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$, знаменатель которой $w(x)$ не обращается в 0 при $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0, \quad f^k(x_0)\neq 0.$$

572. Доказать, что дробная рациональная функция $f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$ может быть представлена в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F(x)}{w(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

где $F(x)$ — полином. Предполагается, что $w(x_0)\neq 0$ (формула Тейлора для дробной рациональной функции).

***573.** Доказать, что если x_0 есть корень кратности k для полинома $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)$, то x_0 будет корнем кратности $k+1$ для полинома $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$, если этот последний не равен нулю тождественно, и обратно.

***574.** Доказать, что если $f(x)$ не имеет кратных корней, то $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ не имеет корней кратности выше $n-1$, где n — степень $f(x)$.

***575.** Построить полином $f(x)$ степени n, для которого $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ имеет корень x_0 кратности $n-1$, не являющийся корнем $f(x)$.

***576.** Пусть $f(z)$ — полином с комплексными коэффициентами и $f(x+yi)=u(x, y)+iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — полиномы с вещественными коэффициентами. Выразить все решения (вещественные и комплексные) системы уравнений $u(x, y)=0$, $v(x, y)=0$ через корни $f(z)$.

§ 2. Наибольший общий делитель полиномов

+ **577.** Определить наибольший общий делитель полиномов:

a) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ и x^3+x^2-x-1;
b) $x^5+x^4-x^3-2x-1$ и $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;
c) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ и $3x^5-7x^3+3x^2-7$;
d) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$ и $3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$;
e) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ и x^5+x^2-x+1;

f) $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ и $x^4+3x^3-6x^2-$
$-22x-12$;

g) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$ и $x^4-2x^3-x^2-2x+1$;

h) x^4-10x^2+1 и $x^4-4\sqrt{2}\,x^3+6x^2+4\sqrt{2}\,x+1$;

i) $x^4+7x^3+19x^2+23x+10$ и $x^4+7x^3+18x^2+22x+12$;

j) x^4-4x^3+1 и x^3-3x^2+1;

k) $2x^6-5x^5-14x^4+36x^3+86x^2+12x-31$ и $2x^5-9x^4+$
$+2x^3+37x^2+10x-14$;

l) $3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1$ и $3x^5+8x^4+$
$+9x^3+15x^2+10x+9$.

+ 578. Пользуясь алгорифмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_2(x)+$ $+f_2(x)M_1(x)=\delta(x)$, где $\delta(x)$ — наибольший общий делитель $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

a) $f_1(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$,
$f_2(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

b) $f_1(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$,
$f_2(x)=x^4+2x^3+x+2$;

c) $f_1(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,
$f_2(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$;

d) $f_1(x)=3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4$,
$f_2(x)=3x^6-3x^4+7x^3-6x+2$;

e) $f_1(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$,
$f_2(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;

f) $f_1(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$,
$f_2(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

579. Пользуясь алгорифмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_2(x)+$ $+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $f_2(x)=x^2-x+1$;

b) $f_1(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_2(x)=x^2-x-1$;

c) $f_1(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$,
$f_2(x)=x^3-5x^2-3x+17$;

d) $f_1(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$,
$f_2(x)=2x^3+x^2-x-1$;

e) $f_1(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$,
$f_2(x)=3x^3-2x^2+x-1$;

f) $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$,
$f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

+ **580.** Способом неопределенных коэффициентов подобрать $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_2'(x)+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=x^4-4x^3+1, \quad f_2(x)=x^3-3x^2+1$;

b) $f_1(x)=x^3, \quad f_2(x)=(1-x)^2$;

c) $f_1(x)=x^4, \quad f_2(x)=(1-x)^4$.

581. Пусть $f_1(x)M(x)+f_2(x)N(x)=\delta(x)$, где $\delta(x)$ — наибольший общий делитель $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Чему равен наибольший общий делитель $M(x)$ и $N(x)$?

582. Подобрать полиномы наименьшей степени $M_1(x)$, $M_2(x)$ так, чтобы

a) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)M_1(x)+$
$+(x^3-5x-3)M_2(x)=x^4$;

b) $(x^4+2x^3+x+1)M_1(x)+$
$+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)M_2(x)=x^3-2x$.

+ **583.** Определить полином наименьшей степени, дающий в остатке:

a) $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$;

b) x^2+x+1 при делении на $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ и $2x^2-3$ при делении на $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

+ ***584.** Найти полиномы $M(x)$ и $N(x)$ так, чтобы

$$x^mM(x)+(1-x)^nN(x)=1.$$

+ **585.** Отделить кратные множители полиномов:

a) $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$;

b) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$;

c) $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$;

d) $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$;

e) $x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$;

f) $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$;

g) $x^8+2x^7+5x^6+6x^5+8x^4+6x^3+5x^2+2x+1$.

586. Найти наибольший общий делитель и его линейное представление для полиномов f и g над полем GF (2):

a) $f=x^5+x^4+1, \quad g=x^4+x^2+1$;

b) $f=x^5+x^3+x+1, \quad g=x^4+1$;

c) $f=x^5+x+1, \quad g=x^4+x^3+1$;

d) $f=x^5+x^3+x, \quad g=x^4+x+1$.

§ 3. Разложение на линейные множители и его применения

587. Разложить на линейные множители полиномы:

a) $x^3-6x^2+11x-6$; b) x^4+4;
c) $x^4+4x^3+4x^2+1$; d) x^4-10x^2+1.

*588. Разложить на линейные множители полиномы:

a) $\cos(n \arccos x)$;
b) $(x+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(x+\cos\theta-i\sin\theta)^n$;
c) $x^m-C_{2m}^2 x^{m-1}+C_{2m}^4 x^{m-2}-\ldots+(-1)^m C_{2m}^{2m}$.

589. Построить полиномы наименьшей степени с комплексными коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$;
b) тройной корень -1, простые 3 и 4;
c) двойной корень i, простой $-1-i$.

590. Разложить на неприводимые вещественные множители полиномы:

a) x^4+4; b) x^6+27; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;
d) $x^{2n}-2x^n+2$; e) x^4-ax^2+1, $-2<a<2$;
f) $x^{2n}+x^n+1$.

591. Найти полином наименьшей степени, корнями которого являются все корни из 1, степени которых не превосходят n.

592. Построить полиномы наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$;
b) тройной корень $2-3i$;
c) двойной корень i, простой $-1-i$.

593. Найти наибольший общий делитель полиномов:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;
b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ и
$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1);$$
c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ и $(x^2-1)^3$.

*594. Найти наибольший общий делитель полиномов
$$x^m-1 \quad \text{и} \quad x^n-1.$$

595. Найти наибольший общий делитель полиномов
$$x^m+a^m \quad \text{и} \quad x^n+a^n.$$

*596. Доказать, что

$$F_{n,m}(x)=\frac{(x-1)(x^2-1)\dots(x^n-1)}{(x-1)\dots(x^m-1)(x-1)\dots(x^{n-m}-1)}$$

есть полином от x с неотрицательными коэффициентами и простыми корнями.

597. Найти наибольший общий делитель полинома и его производной:

a) $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3)$;

b) $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;

c) $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n+1$.

598. Полином $f(x)$ не имеет кратных корней. Доказать, что если x_0 есть корень кратности $k>1$ для уравнения $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=0$, то уравнение $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)=0$ имеет x_0 корнем кратности $k-1$.

Предполагается, что $v(x_0)\neq 0$, $v'(x_0)\neq 0$.

599. Доказать, что $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2+x+1.

600. Когда $x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^2-x+1?

601. При каком условии $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на x^4+x^2+1?

602. При каком условии $x^{2m}+x^m+1$ делится на x^2+x+1?

603. При каких значениях m полином $f(x)=(x+1)^m-x^m-1$ делится на x^2+x+1?

604. При каких значениях m полином $f(x)=(x+1)^m+x^m+1$ делится на x^2+x+1?

605. При каких значениях m полином $f(x)=(x+1)^m-x^m-1$ делится на $(x^2+x+1)^2$?

606. При каких значениях m полином $(x+1)^m+x^m+1$ делится на $(x^2+x+1)^2$?

607. Могут ли полиномы $(x+1)^m+x^m+1$ и $(x+1)^m-x^m-1$ делится на $(x^2+x+1)^3$?

608. При каких значениях m полином $X_n(x^m)$ делится на $X_n(x)$? (X_n — круговой полином.)

Доказать теоремы:

609. Если $f(x^n)$ делится на $x-1$, то делится и на x^n-1.

610. Если $f(x^n)$ делится на $(x-a)^k$, то делится и на $(x^n-a^n)^k$ при $a\neq 0$.

611. Если $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ делится на x^2+x+1, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ делятся на $x-1$.

*612. Если полином $f(x)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяет неравенству $f(x) \geqslant 0$ при всех вещественных значениях x, то $f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + [\varphi_2(x)]^2$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

613. Полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Какие корни имеют полиномы:

a) $a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$;

b) $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$;

c) $f(a) + \frac{f'(a)}{1}x + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;

d) $a_0x^n + a_1bx^{n-1} + a_2b^2x^{n-2} + \ldots + a_nb^n$?

614. Определить λ так, чтобы один из корней уравнения $x^3 - 7x + \lambda = 0$ равнялся удвоенному другому.

615. Сумма двух корней уравнения

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$$

равна 1. Определить λ.

616. Определить соотношение между коэффициентами уравнения $x^3 + px + q = 0$, при выполнении которого $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

617. Найти сумму квадратов корней полинома

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

618. Решить уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

зная коэффициенты a_1 и a_2 и зная, что корни его образуют арифметическую прогрессию.

619. Дана кривая

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Найти прямую так, чтобы точки пересечения M_1, M_2, M_3, M_4 ее с кривой отсекали три равных отрезка: $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$. При каком условии эта задача имеет решение?

*620. Составить уравнение 4-й степени, корнями которого являются α, $\frac{1}{\alpha}$, $-\alpha$, $-\frac{1}{\alpha}$.

*621. Составить уравнение 6-й степени, имеющее корни:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1-\alpha},\ 1-\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

622. Разложить на линейные множители полином $x^p - x$ над полем GF (p).

623. Сравнить свободные члены полинома $x^{p-1}-1$ и его разложения на линейные множители над полем GF (p).

§ 4. Разложение рациональной дроби на простейшие

*624. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{C}$:

a) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; b) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

c) $\dfrac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; d) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$; e) $\dfrac{1}{x^3-1}$;

f) $\dfrac{1}{x^4+4}$; g) $\dfrac{1}{x^n-1}$; h) $\dfrac{1}{x^n+1}$;

i) $\dfrac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}$;

j) $\dfrac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}$; k) $\dfrac{1}{\cos(n \arccos x)}$.

*625. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{C}$:

a) $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$; b) $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$; c) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$;

d) $\dfrac{1}{(x^n-1)^2}$; e) $\dfrac{1}{x^m(1-x)^n}$; f) $\dfrac{1}{(x^2-a^2)^n}$, $a \neq 0$;

g) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$; h) $\dfrac{g(x)}{[f(x)]^2}$,

где $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ — полином, не имеющий кратных корней, и $g(x)$ — полином, степень которого меньше $2n$.

*626. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{1}{x^3-1}$; b) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$; c) $\dfrac{1}{x^4+4}$; d) $\dfrac{x^2}{x^6+27}$;

e) $\dfrac{x^m}{x^{2n+1}-1}$, $m < 2n+1$;

f) $\dfrac{x^m}{x^{2n+1}+1}$, $m < 2n+1$;

g) $\frac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$;

i) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\ldots(x^2+n^2)}$.

627. Разложить на простейшие дроби над полем $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\frac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

628. Пусть $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

a) $\sum\frac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\frac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\frac{1}{(x-x_i)^2}$.

***629.** Вычислить следующие суммы, зная, что $x_1, x_2, \ldots$ суть корни полинома $\varphi(x)$:

a) $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$, $\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\frac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\frac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\frac{1}{x_3^2-3x_3+2}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1$;

c) $\frac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\frac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\frac{1}{x_3^2-2x_3+1}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

630. Разложить $\frac{1}{x^p-x}$ на простейшие дроби над полем $GF(p)$.

§ 5. Интерполяция

631. Пользуясь способом Ньютона, построить полином наименьшей степени по данной таблице значений:

a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	6

; b)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

;

c)

x	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

, найти $f(2)$; d)

x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	−4	10

.

632. Построить полином по заданной таблице значений, пользуясь формулой Лагранжа:

a) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & i & -1 & -i \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$.

***633.** Найти $f(x)$ по таблице значений:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array}, \quad \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

634. Полином $f(x)$, степень которого не превосходит $n-1$, принимает значения $y_1, y_2, \dots, y_n$ в корнях n-й степени из 1. Найти $f(0)$.

***635.** Доказать теорему: для того чтобы

$$f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

для любого полинома $f(x)$, степень которого не превосходит $n-1$, необходимо и достаточно, чтобы точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ были расположены на окружности с центром в x_0 и делили ее на равные части.

***636.** Доказать, что если корни

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

полинома $\varphi(x)$ все различны, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant n-2.$$

637. Найти сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (обозначения такие же, как и в задаче 636).

638. Вывести интерполяционную формулу Лагранжа посредством решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1, \\ a_0 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n. \end{aligned}$$

Построить полином наименьшей степени по таблице значений:

*639.

x	0	1	2	...	n
y	1	2	4	...	2^n

*640.

x	0	1	2	...	n
y	1	a	a^2	...	a^n

*641. Найти полином степени $2n$, дающий при делении на $x(x-2)\dots(x-2n)$ в остатке 1, а при делении на $(x-1)(x-3)\dots[x-(2n-1)]$ в остатке -1.

*642. Построить полином наименьшей степени по таблице значений

x	1	2	3	...	n
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{n}$

643. Решить предыдущую задачу при $n=p-1$ над полем $GF(p)$.

*644. Найти полином не выше $(n-1)$-й степени, удовлетворяющий условию $f(x)=1/(x-a)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$, $x_i \neq a$, $i=1, 2, \dots, n$.

*645. Доказать, что полином степени $k \leqslant n$, принимающий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной.

*646. Доказать, что полином степени n, принимающий целые значения при $x=0, 1, 4, 9, \dots, n^2$, принимает целые значения при всех квадратах натуральных чисел.

647. Определить полином первой степени, приближенно принимающий таблицу значений

x	0	1	2	3	4
y	2,1	2,5	3,0	3,6	4,1

так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей.

648. Определить полином второй степени, приближенно принимающий таблицу значений

x	0	1	2	3	4
y	1	1,4	2	2,7	3,6

так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей.

§ 6. Рациональные корни полиномов. Приводимость и неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ и над полем $\mathrm{GF}(p)$

649. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x)=a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами, то:

1) q есть делитель a_0;

2) p есть делитель a_n;

3) $p-mq$ есть делитель $f(m)$ при любом целом m. В частности, $p-q$ есть делитель $f(1)$, $p+q$ — делитель $f(-1)$.

650. Найти рациональные корни полиномов:

a) $x^3-6x^2+15x-14$;

b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;

c) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$;

d) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;

e) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$;

f) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;

g) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;

h) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$;

i) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$;

j) $2x^3+3x^2+6x-4$; k) $4x^4-7x^2-5x-1$;

l) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$;

m) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$;

n) $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$.

***651.** Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

***652.** Доказать, что если полином с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 при двух целых значениях x_1 и x_2 независимой переменной, то он не имеет рациональных корней, если $|x_1-x_2|>2$. Если же $|x_1-x_2|\leqslant 2$, то рациональным корнем может быть только $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Доказать неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ полиномов:

***653.** a) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;

b) $x^5-12x^3+36x-12$; c) x^4-x^3+2x+1.

***654.** $X_p(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$, p — простое число.

***655.** $X_{p^k}(x)=\dfrac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}$, p — простое число.

*656. Доказать, что полином $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами, не имеющий рациональных корней, неприводим над $\mathbb{Q}$, если существует такое простое число p, что a_0 не делится на p; $a_2, a_3, \ldots, a_n$ делятся на p и a_n не делится на p^2.

657. Пусть $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами, для которого существует такое простое число p, что a_0 не делится на p; $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ делятся на p и a_n не делится на p^2. Доказать, что тогда $f(x)$ имеет неприводимый над $\mathbb{Q}$ множитель степени $\geqslant n-k$.

658. Составить таблицу неприводимых полиномов, до пятой степени включительно, над полем GF (2).

659. Составить таблицу неприводимых полиномов, до третьей степени включительно, над полем GF (3).

660. Доказать неприводимость полинома x^5+2x^3+ $+3x^2-6x-5$ над полем $\mathbb{Q}$, воспользовавшись редукцией по модулю 2.

*661. Доказать неприводимость полинома x^5-6x^3+ $+2x^2-4x+5$ над полем $\mathbb{Q}$, воспользовавшись редукцией по модулям 2 и 3.

662. Доказать, что полиномы $X_d(x)$ при $d\,|\,p-1$ разлагаются на линейные множители над полем GF (p).

663. Доказать существование первообразного корня $(p-1)$-й степени из 1 в поле GF (p).

664. Пусть $f(x)$ — неприводимый полином над полем GF (p). Доказать, что полиномы $f(x)$, $f(x+1)$, $\ldots$ $\ldots$, $f(x+p-1)$ либо попарно различны, либо все совпадают.

*665. Доказать, что полином $f(x)=x^p-x-a$ при $a\not\equiv 0 \pmod p$ неприводим над полем GF (p).

666. Методом разложения на множители значений полинома при целых значениях переменной разложить на множители полиномы или доказать их неприводимость над $\mathbb{Q}$.

a) x^4-3x^2+1; b) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$;

c) $x^4+3x^3-2x^2-2x+1$; d) $x^4-x^3-3x^2+2x+2$.

667. Доказать, что полином четвертой степени x^4+ $+ax^3+bx^2+cx+d$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из полиномов вида

$$x^2+\frac{cm-am^2}{d-m^2}\,x+m,$$

где m — делитель числа d. Полиномы с дробными коэффициентами можно не принимать во внимание. Исключение могут представить полиномы, коэффициенты которых удовлетворяют условиям: $d=k^2$, $c=ak$.

668. Доказать, что полином пятой степени $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из полиномов с целыми коэффициентами вида

$$x^2+\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm}x+m,$$

где m — делитель e, $n=\frac{e}{m}$.

669. Разложить на множители полиномы или доказать их неприводимость над $\mathbb{Q}$, пользуясь задачами 667, 668:

a) $x^4-3x^3+2x^2+3x-9$;

b) $x^4-3x^3+2x^2+2x-6$;

c) $x^4+4x^3-6x^2-23x-12$;

d) $x^5+x^4-4x^3+9x^2-6x+6$.

670. Найти все приводимые над $\mathbb{Q}$ полиномы вида x^5+ax^3+bx+1 с целыми a и b.

671. Найти необходимые и достаточные условия приводимости над $\mathbb{Q}$ полинома x^4+px^2+q с рациональными (быть может дробными) коэффициентами.

672. Доказать, что для приводимости над $\mathbb{Q}$ полинома четвертой степени, не имеющего рациональных корней, необходимо (но не достаточно) существование рационального корня кубического уравнения, получающегося при решении по способу Феррари.

***673.** Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ полинома $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные между собой целые числа.

***674.** Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ полинома $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$ при различных между собой целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ за исключениями

$$(x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)+1=$$
$$=[(x-a-1)(x-a-2)-1]^2$$

и

$$(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2.$$

***675.** Доказать, что если полином n-й степени с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 более чем при $2m$ целых значениях переменной ($n=2m$ или $2m+1$), то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

***676.** Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ полинома

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1,$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные между собой целые числа.

***677.** Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами, принимающий значение $+1$ более чем при трех целых значениях назависимой переменной, не может принимать значение -1 при целых значениях независимой переменной.

***678.** Доказать, что полином n-й степени с целыми коэффициентами, принимающий значения ± 1 более чем при $n/2$ целых значениях независимой переменной, неприводим над $\mathbb{Q}$ при при $n \geqslant 12$.

***679.** Доказать, что если полином с целыми коэффициентами ax^2+bx+1 неприводим над $\mathbb{Q}$, то неприводим и полином

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1,$$

где $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ при $n \geqslant 7$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые, различные между собой числа.

§ 7. Сравнения в кольце полиномов. Алгебраические расширения

***680.** Выполнить действия в кольце $\mathbb{Q}[x]/\varphi$ (классов вычетов кольца $\mathbb{Q}[x]$ по модулю φ):

a) $(x^2+x+1)^3$, $\varphi(x)=x^3-1$;

b) $\dfrac{x+2}{x-2}$, $\varphi(x)=x^3+x+1$;

c) $\dfrac{1}{x^2+x-1}$, $\varphi(x)=x^3-2$;

d) $\dfrac{1}{(1+x)^m}$, $\varphi(x)=x^n$.

681. Установить изоморфизм полей $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ и $\mathbb{Q}[x]/(x^3-3)$.

682. Установить изоморфизм кольца $Q[x]/(x^2-3x+2)$ и кольца, образованного парами (a, b) рациональных чисел, с покомпонентными сложением и умножением.

*683. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. В кольце $K[x]/(f)$, где K — некоторое поле, выразить $\lambda_i\lambda_j$ линейно через λ_k. Здесь $\lambda_0=a_0$, $\lambda_i=a_0x^i+\ldots+a_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

*684. Исключить иррациональность в знаменателе:

a) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3-3\alpha+1=0$;

b) $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

c) $\dfrac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1}$, $\qquad \alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; $\qquad$ e) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$;

f) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $\qquad$ g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$.

*685. Составить уравнение с рациональными коэффициентами, корнем которого является λ:

a) $\lambda=\alpha^2+\alpha+1$, $\qquad \alpha^3-\alpha-1=0$;

b) $\lambda=\alpha^2+1$, $\qquad \alpha^3+2\alpha^2+2=0$;

c) $\lambda=2-\alpha^2$, $\qquad \alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0$;

d) $\lambda=\alpha^3-2$, $\qquad \alpha^4-\alpha-2=0$;

e) $\lambda=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$, $\qquad \alpha^4-\alpha^3-\alpha^2+1=0$.

686. Составить уравнение с рациональными коэффициентами для λ и выразить α через λ, если это возможно:

a) $\lambda=\alpha^2+\alpha$, $\qquad \alpha^3-\alpha+2=0$;

b) $\lambda=\alpha^3+\alpha$, $\qquad \alpha^4-3\alpha+1=0$;

c) $\lambda=\alpha^3+4\alpha^2+3\alpha-1$, $\qquad \alpha^4+5\alpha^3+6\alpha^2-1=0$.

687. Пусть L — расширение поля $K=\mathrm{GF}(p)$, содержащее p^m элементов. Доказать, что все элементы поля L удовлетворяют уравнению $x^{p^m}-x=0$.

688. Пусть $f(x)$ — неприводимый полином степени m над полем $K=\mathrm{GF}(p)$. Доказать, что он есть делитель полинома $x^{p^m}-x$.

689. Пусть в некотором поле L характеристики p полином $x^{p^m}-x$ раскладывается на линейные множители. Доказать, что все корни этого полинома попарно различны и образуют поле.

690. Пусть X_{p^m-1} — круговой полином. Доказать, что всякий его неприводимый множитель над полем $K=\mathrm{GF}(p)$ имеет степень m.

691. Доказать, что существует одно и только одно (с точностью до изоморфизма) поле из p^m элементов (оно обозначается $\mathrm{GF}(p^m)$).

692. Подсчитать число неприводимых над $K=\mathrm{GF}(p)$ полиномов данной степени.

§ 8. Симметрические полиномы

693. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5$;

e) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

f) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

g) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

h) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

694. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;

b) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;

c) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

695. Выразить через основные симметрические полиномы моногенные полиномы:

a) $x_1^2+\ldots$;
b) $x_1^3+\ldots$;
c) $x_1^2x_2x_3+\ldots$;
d) $x_1^2x_2^2+\ldots$;
e) $x_1^3x_2+\ldots$;
f) $x_1^4+\ldots$;
g) $x_1^2x_2^2x_3+\ldots$;
h) $x_1^3x_2x_3+\ldots$;
i) $x_1^3x_2^2+\ldots$;
j) $x_1^4x_2+\ldots$;
k) $x_1^5+\ldots$;
l) $x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots$;
m) $x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots$;
n) $x_1^3x_2x_3x_4+\ldots$;
o) $x_1^3x_2^2x_3+\ldots$;
p) $x_1^3x_2^3+\ldots$;
q) $x_1^4x_2x_3+\ldots$;
r) $x_1^4x_2^2+\ldots$;
s) $x_1^5x_2+\ldots$;
t) $x_1^6+\ldots$

696. Выразить через основные симметрические полиномы моногенный полином

$$x_1^2x_2^2\ldots x_k^2+\ldots$$

697. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$;

b) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\frac{(x_3-x_1)^2}{x_3+x_1}$;

c) $\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)$.

698. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\sum\frac{1}{x_i}$; b) $\sum\frac{1}{x_i^2}$; c) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i}{x_j}$.

699. Вычислить сумму квадратов корней уравнения

$$x^3+2x-3=0.$$

700. Вычислить $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_3x_1^3$ от корней уравнения $x^3-x^2-4x+1=0$.

701. Определить значение моногенной симметрической функции

$$x_1^3x_2x_3+\ldots$$

от корней уравнения

$$x^4+x^3-2x^2-3x+1=0.$$

702. Вычислить значение симметрической функции от корней уравнения $f(x)=0$:

a) $x_1^4x_2+\ldots,\qquad f(x)=3x^3-5x^2+1$;

b) $x_1^3x_2^3+\ldots,\qquad f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1$;

c) $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2)$,

$$f(x)=5x^3-6x^2+7x-8.$$

703. Выразить через коэффициенты уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

следующие симметрические функции:

a) $a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

b) $a_0^4(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)$;

c) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\frac{(x_1-x_3)^2}{x_1x_3}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}$;

d) $a_0^4(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2)$.

704. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Доказать, что симметрический полином от $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можно представить в виде полинома от x_1.

***705.** Пусть $\varphi_k(x_1)$ есть k-й основной симметрический полином от $x_2, \ldots, x_n$. Вывести из формулы (см. решение задачи 704)

$$\varphi_k(x_1) = f_k - x_1 f_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} x_1^{k-1} f_1 + (-1)^k x_1^k$$

формулу Ньютона $s_k - f_1 s_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} f_{k-1} s_1 + (-1)^k k f_k = 0$, связывающую степенные суммы $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$ с основными симметрическими полиномами.

706. Найти выражение для s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 через основные симметрические полиномы, пользуясь формулами Ньютона.

707. Выразить f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 через степенные суммы $s_1, s_2, \ldots$, пользуясь формулами Ньютона.

708. Найти суммы s_k от корней уравнения:

a) $x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Найти s_5.

b) $x^4 - x^3 - 1 = 0$. Найти s_8.

c) $x^3 - 3x + 1 = 0$. Найти s_{10}.

709. Найти $s_1, s_2, \ldots, s_n$ от корней уравнения

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n!} = 0.$$

710. Найти уравнения n-й степени, для которых

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = 0.$$

711. Найти уравнения n-й степени, для которых

$$s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0.$$

***712.** Выразить $\sum\limits_{i<j} (x_i + x_j)^k$ через степенные суммы.

***713.** Выразить $\sum\limits_{i<j} (x_i - x_j)^{2k}$ через степенные суммы.

***714.** Доказать, что $s_k = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3f_3 & f_2 & f_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kf_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \ldots & f_1 \end{vmatrix}$.

715. Доказать, что $f_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1\ 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$.

716. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \\ s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & n \end{vmatrix}$.

717. Найти s_m от корней уравнения $X_n(x) = 0$.

***718.** Доказать, что f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 и f_6 от корней полинома $X_n(x)$ могут принимать только значения 0 и ± 1.

***719.** Вычислить степенные суммы $s_1, s_2, \dots, s_n$ от корней уравнения

$$x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2+ab+b^2)x^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n) = 0.$$

§ 9. Результант и дискриминант

***720.** Доказать, что результант полиномов

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{и} \quad \varphi(x) = b_0x^m + \dots + b_m$$

равен определителю, составленному из коэффициентов остатков при делении $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, $\dots$, $x^{n-1}\varphi(x)$ на $f(x)$. Предполагается, что остатки расположены в порядке возрастания степеней x (способ Эрмита).

Замечание. Остаток $r_k(x)$ при делении $x^{k-1}\varphi(x)$ на $f(x)$ равен остатку при делении $xr_{k-1}(x)$ на $f(x)$.

***721.** Доказать, что результант полиномов

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

и

$$\varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$$

равен определителю, составленному из коэффициентов полиномов $(n-1)$-й степени (или ниже)

$$\psi_k(x) = (a_0x^{k-1} + a_1x^{k-2} + \dots + a_{k-1})\varphi(x) -$$
$$-(b_0x^{k-1} + b_1x^{k-2} + \dots + b_{k-1})f(x),$$

$k = 1, \dots, n$ (способ Безу).

Замечание.

$$\psi_1 = a_0\varphi - b_0 f, \quad \psi_k = x\psi_{k-1} + a_{k-1}\varphi - b_{k-1} f.$$

*722. Доказать, что результант полиномов

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

и

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

при $n > m$ равен определителю, составленному из коэффициентов полиномов не выше $(n-1)$-й степени $\chi_k(x)$, определенных по формулам:

$\chi_k(x) = x^{k-1}\varphi(x)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-m$;

$$\chi_k(x) = \\ = (a_0x^{k-n+m-1} + a_1x^{k-n+m-2} + \ldots + a_{k-n+m-1})\, x^{n-m}\varphi(x) - \\ - (b_0x^{k-n+m-1} + b_1x^{k-n+m-2} + \ldots + b_{k-n+m-1})\, f(x)$$

(полиномы χ_k располагаются в порядке возрастающих степеней x).

Замечание.

$$\chi_{n-m+1} = a_0x^{n-m}\varphi(x) - b_0 f(x),$$
$$\chi_k = x\chi_{k-1} + a_{k-n+m-1}x^{n-m}\varphi(x) - b_{k-n+m-1} f(x)$$

при $k > n-m+1$.

723. Вычислить результант полиномов:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$;
b) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $x^2 + x + 3$;
c) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ и $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$;
d) $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $2x^3 + x^2 - x - 1$;
e) $2x^4 - x^3 + 3$ и $3x^3 - x^2 + 4$;
f) $a_0x^2 + a_1x + a_2$ и $b_0x^2 + b_1x + b_2$.

724. При каком значении λ полиномы имеют общий корень:

a) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^2 + \lambda x + 2$;
b) $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3$ и $x^2 + \lambda^2 - 2$;
c) $x^3 + \lambda x^2 - 9$ и $x^3 + \lambda x - 3$?

725. Исключить x из системы уравнений:

a) $x^2 - xy + y^2 = 3$, $\quad x^2y + xy^2 = 6$;
b) $x^3 - xy - y^3 + y = 0$, $\quad x^2 + x - y^2 - 1 = 0$;
c) $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 8$, $\quad y = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$.

726. Решить системы:

a) $y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0,$
$y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0;$

b) $y^2+x^2-y-3x=0,$
$y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0;$

c) $5y^2-6xy+5x^2-16=0,$
$y^2-xy+2x^2-y-x-4=0;$

d) $y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0,$
$y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0;$

e) $2y^3-4xy^2-(2x^2-12x+8)y+x^3+6x^2-16x=0,$
$4y^3-(3x+10)y^2-(4x^2-24x+16)y-3x^3+$
$+2x^2-12x+40=0.$

727. Определить результант полиномов

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{и} \quad a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.$$

728. Доказать, что $R(f, \varphi_1\cdot\varphi_2)=R(f, \varphi_1)\cdot R(f, \varphi_2)$.

***729.** Найти результант полиномов X_n и x^m-1.

***730.** Найти результант полиномов X_m и X_n.

731. Вычислить дискриминанты полиномов:

a) x^3-x^2-2x+1; b) x^3+2x^2+4x+1;

c) $3x^3+3x^2+5x+2$; d) $x^4-x^3-3x^2+x+1$;

e) $2x^4-x^3-4x^2+x+1$.

732. Вычислить дискриминанты полиномов

a) $x^5-5ax^3+5a^2x-b$; b) $(x^2-x+1)^3-\lambda(x^2-x)^2$;

c) $ax^3-bx^2+(b-3a)x+a$;

d) $x^4-\lambda x^3+3(\lambda-4)x^2-2(\lambda-8)x-4$.

733. При каком значении λ полином имеет кратные корни:

a) $x^3-3x+\lambda$; b) $x^4-4x+\lambda$;

c) $x^3-8x^2+(13-\lambda)x-(6+2\lambda)$;

d) $x^4-4x^3+(2-\lambda)x^2+2x-2$?

Вычислить дискриминанты полиномов:

734. x^n+a.

***735.** x^n+px+q.

***736.** $a_0x^{m+n}+a_1x^m+a_2$.

737. Зная дискриминант полинома

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

найти дискриминант полинома

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

738. Доказать, что дискриминант полинома четвертой степени равен дискриминанту его резольвенты Феррари (см. задачу 174).

739. Доказать, что

$$D((x-a) f(x)) = D(f(x)) [f(a)]^2.$$

***740.** Вычислить дискриминант полинома

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1.$$

***741.** Вычислить дискриминант полинома

$$x^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a.$$

742. Доказать, что дискриминант произведения двух полиномов равен произведению дискриминантов, умноженному на квадрат их результанта.

743. Найти дискриминант полинома

$$X_{p^m} = \frac{x^{p^m} - 1}{x^{p^{m-1}} - 1}.$$

***744.** Найти дискриминант кругового полинома X_n.

Вычислить дискриминанты полиномов:

***745.** $E_n = n! \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$

***746.** $F_n = x^n + \frac{a}{1} x^{n-1} + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \ldots$

$$\ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

***747.** $P_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ (полином Эрмита).

***748.** $P_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}$ (полином Лагерра).

***749.** $2 \cos \left(n \arccos \frac{x}{2}\right)$ (полином Чебышева).

***750.** $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} (1 + x^2)^{n+1} \frac{d^n \left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx^n}.$

*751. $P_n(x) = (-1)^n (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n}$.

*752. $P_n(x) = (-1)^n x^{2n+2} e^{-\frac{1}{x}} \dfrac{d^n \left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n}$.

*753. Найти максимум дискриминанта полинома

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

все корни которого вещественны и связаны соотношением

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1) R^2.$$

754. Зная дискриминант $f(x)$, найти дискриминант $f(x^2)$.

755. Зная дискриминант $f(x)$, найти дискриминант $f(x^m)$.

756. Доказать, что дискриминант $F(x) = f(\varphi(x))$ равен

$$[D(f)]^m \prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x) - x_i),$$

где m — степень $\varphi(x)$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни $f(x)$. Старшие коэффициенты f и φ принимаются равными единице.