ГЛАВА VI

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Теоретические основы

Пусть f и g — два полинома с вещественными коэффициентами, не имеющие общих вещественных корней. Вещественный корень x_0 полинома f отнесем к первому типу относительно g, если произведение fg меняет знак с — на $+$, когда x, возрастая, проходит через x_0. Корень относится ко второму типу, если fg меняет знак с $+$ на —. Если fg не меняет знака при прохождении x через корень f, то такой корень (необходимо четной кратности) не относится ни к первому, ни ко второму типу. Пусть $a < b$, причем $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$. Индексом полинома f относительно g называется разность между числом корней полинома f первого и второго типа, заключенных в интервале (a, b).

Рядом Штурма $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_k$ с началом f, g называется последовательность полиномов, в которой $h_0 = f$, $h_1 = g$ и выполнены требования: 1) h_k не обращается в нуль при $a \leqslant x \leqslant b$. 2) Если $h_i(x_0) = 0$ $(0 < i < k)$, то $h_{i-1}(x_0)\, h_{i+1}(x_0) < 0$.

Имеет место теорема Штурма: индекс f относительно g равен разности числа перемен знаков в значениях полиномов ряда Штурма, вычисленных в начале и в конце отрезка.

Для построения ряда Штурма можно применить алгорифм Евклида к полиномам $h_0 = f$, $h_1 = g$, принимая за h_{i+1} остаток от деления h_{i-1} на h_i, взятый с обратным знаком. Последним полиномом окажется константа или полином, не имеющий вещественных корней.

757. Доказать, что если полином f не имеет кратных корней и $g=f'$, то все вещественные корни f будут корнями первого типа относительно g, так что индекс f относительно f' в интервале (a, b) равен числу корней в этом интервале.

758. Доказать, что если полином f не имеет кратных корней, то вещественный корень x_0 полинома f будет корнем первого типа относительно g, если $\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}>0$, и второго типа, если $\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}<0$.

***759.** Пусть последовательность полиномов $f_0, f_1, \ldots, f_n$ такова, что степень f_k равна k, старшие коэффициенты положительны и $f_k(x)=a_k(x) f_{k-1}(x)-c_k(x) f_{k-2}(x)$, где $a_k(x)$ и $c_k(x)$ — полиномы и $c_k(x)>0$ при всех вещественных x для всех $k \geqslant 2$. Доказать, что все корни всех полиномов вещественны и корни соседних полиномов разделяются (т. е. между любыми двумя корнями полинома f_k есть один корень полинома f_{k-1}).

***760.** Дан полином $f(z)$ с комплексными коэффициентами и на плоскости комплексной переменной z дан простой замкнутый контур (т. е. замкнутая линия без самопересечений). Известно, что на этом контуре нет корней полинома $f(z)$. Доказать, что число корней полинома $f(z)$ внутри контура (с учетом кратностей) равно приращению аргумента $f(z)$, деленному на 2π, вычисленному в предположении, что z обходит контур один раз в положительном направлении. Иными словами, число корней внутри контура равно числу оборотов точки $f(z)$ вокруг начала (эта теорема называется принципом аргумента).

***761.** Пусть $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ — полином с комплексными коэффициентами и на плоскости комплексной переменной дан простой замкнутый контур. Пусть известно, что для всех z на контуре имеет место строгое неравенство $|f_1(z)|>|f_2(z)|$. Доказать, что полиномы $f(z)$ и $f_1(z)$ имеют одинаковое число корней внутри контура (теорема Руше).

***762.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, не имеющие общих вещественных корней, и $h(z)=f(z)+ig(z)$. Обозначим через n_1 число корней (с учетом кратности) полинома $h(z)$ в верхней полуплоскости, через n_2 — число корней в нижней полуплоскости. Ясно, что $n_1+n_2=n$ — степени полинома $h(z)$, ибо этот полином вещественных корней не имеет. Доказать, что $n_1-n_2=\frac{1}{\pi}\Delta\arg h(x)$. Здесь приращение аргумента вычисляется в предположении, что x пробегает всю вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$.

***763.** В предположениях задачи 762 допустим, что степень f не меньше степени g. Доказать, что n_1-n_2 равно индексу $f(x)$ относительно $g(x)$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

764. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет вещественные коэффициенты и его корни $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны. Для квадратичной формы

$$F(t_1, \ldots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}(t_1p_1(x_i)+\ldots+t_np_n(x_i))^2$$

вычислить дискриминант и связать знаки коэффициентов ее канонического разложения с расположением корней полинома $f(x)$. Здесь

$$\begin{aligned} p_1(x)&=c_{11}+c_{12}x+\ldots+c_{1n}x^{n-1},\\ p_2(x)&=c_{21}+c_{22}x+\ldots+c_{2n}x^{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_n(x)&=c_{n1}+c_{n2}x+\ldots+c_{nn}x^{n-1}, \end{aligned}$$

причем $C=(c_{ij})$ — вещественная невырожденная матрица.

765. Ответить на те же вопросы для квадратичной формы

$$F_\lambda(t_1, \ldots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda-x_i)(t_1p_1(x_i)+\ldots+t_np_n(x_i))^2.$$

766. Ответить на те же вопросы для квадратичной формы

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f'(x_i)}(t_1p_1(x_i)+\ldots+t_np_n(x_i))^2,$$

где $g(x)$ — полином с вещественными коэффициентами, не имеющий общих корней с $f(x)$.

767. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы F задачи 764 при $a_0=1$, $p_k(x)=x^{k-1}$, $k=1, \ldots, n$.

768. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы F_λ задачи 765 при $a_0=1$, $p_k(x)=x^{k-1}$.

*769. Пусть $g(x)=b_0x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}$. Показать, что коэффициенты φ_{ij} квадратичной формы Φ задачи 766, при $a_0=1$ и $p_k(x)=x^{k-1}$, задаются формулами $\varphi_{ij}=$ $=b_0u_{i+j+n-3}+\ldots+b_{n-1}u_{i+j-2}$, где u_0, u_1, u_2, ... — последовательность, строящаяся по рекуррентным соотношениям $u_{m+n}+a_1u_{m+n-1}+\ldots+a_nu_m=0$ при начальных условиях $u_0=\ldots=u_{n-2}=0$, $u_{n-1}=1$.

*770. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы задачи 764 при $p_1(x)=1$, $p_k(x)=a_0x^{k-1}+\ldots$ $\ldots+a_{k-1}$, $k\geqslant 1$.

*771. Вычислить матрицу коэффициентов квадратичной формы задачи 765 при $p_1(x)=a_0$, $p_k(x)=a_0x^{k-1}+\ldots$ $\ldots+a_{k-1}$, $k\geqslant 1$.

*772. Пусть $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$. Доказать, что матрица квадратичной формы Φ задачи 766, при $p_1(x)=a_0$, $p_k(x)=a_0x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}$ лишь порядком столбцов отличается от матрицы метода Безу вычисления результанта (см. задачу 721).

§ 2. Теорема Штурма

Составить ряд Штурма и отделить корни полиномов:

773. a) x^3-3x-1; b) x^3+x^2-2x-1;
c) x^3-7x+7; d) x^3-x+5; e) x^3+3x-5.

774. a) $x^4-12x^2-16x-4$; b) x^4-x-1;
c) $2x^4-8x^3+8x^2-1$; d) x^4+x^2-1;
e) $x^4+4x^3-12x+9$.

775. a) $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$;
b) $x^4-2x^3+x^2-2x+1$;
c) $x^4-2x^3-3x^2+2x+1$;
d) $x^4-x^3+x^2-x-1$;
e) $x^4-4x^3-4x^2+4x+1$.

776. a) $x^4-2x^3-7x^2+8x+1$; b) x^4-4x^2+x+1;
c) $x^4-x^3-x^2-x+1$;
d) $x^4-4x^3+8x^2-12x+8$;
e) x^4-x^3-2x+1.

777. a) x^4-6x^2-4x+2; b) $4x^4-12x^2+8x-1$;
c) $3x^4+12x^3+9x^2-1$; d) $x^4-x^3-4x^2+4x+1$;
e) $9x^4-126x^2-252x-140$.

778. a) $2x^5-10x^3+10x-3$;
b) $x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$;
c) $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$;
d) $x^5-5x^3-10x^2+2$.

779. Составить ряд Штурма, используя право делить функции Штурма на положительные величины, и отделить корни полиномов:

a) x^4+4x^2-1; b) $x^4-2x^3+3x^2-9x+1$;
c) $x^4-2x^3+2x^2-6x+1$;
d) $x^5+5x^4+10x^2-5x-3$.

780. Пользуясь теоремой Штурма, определить число вещественных корней уравнения $x^3+px+q=0$ при вещественных p и q.

***781.** Определить число вещественных корней уравнения

$$x^n+px+q=0.$$

782. Определить число вещественных корней уравнения

$$x^5-5ax^3+5a^2x+2b=0.$$

***783.** Пусть $f(x)$ — полином третьей степени, не имеющий кратных корней. Показать, что полином $F(x)=2f(x)f''(x)-[f'(x)]^2$ имеет два и только два вещественных корня. Исследовать случаи, когда $f(x)$ имеет двойной или тройной корень.

784. Доказать, что если ряд Штурма содержит полиномы всех степеней от нулевой до n-й, то число перемен знака в ряду старших коэффициентов полиномов Штурма равно числу пар сопряженных комплексных корней исходного полинома.

***785.** Определить число вещественных корней полинома

$$E_n(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

В задачах 786—790 доказать вещественность корней некоторых специальных полиномов, опираясь на теорему задачи 759.

786. $P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ (полиномы Эрмита).

787. $P_n(x)=(-1)^n e^x \dfrac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}$ (полиномы Лагерра).

788. $P_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

789. $P_n(x) = (-1)^n (x^2+1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

790. $P_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}$.

§ 3. Принцип аргумента и его следствия

791. Пользуясь теоремой Руше, определить число корней полинома x^5-4x^2-2 в круге радиуса 1 и в круге радиуса 2.

***792.** Узнать, сколько корней в верхней полуплоскости имеет полином $h(x) = f(x) + ig(x)$:

a) $f(x) = 6x^4 - 6x^3 - 15x^2 + 9x + 8$; $g(x) = 2x^3 - 3x$;

b) $f(x) = x^4 - 3$; $g(x) = x^3 + 1$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; $g(x) = -x^3 + 3x - 1$.

Доказать следующие теоремы:

***793.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые полиномы с вещественными коэффициентами и степень g не превосходит степени f. Для того, чтобы все корни полинома $h(x) = f(x) + ig(x)$ лежали только в верхней или только в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов f и g были все вещественны и разделялись.

***794.** Если корни взаимно простых полиномов $f(x)$ и $g(x)$ вещественные и разделяются, то все корни полиномов $\lambda f(x) + \mu g(x)$ вещественны при любых вещественных λ и μ.

***795.** Пусть $\varphi(z)$ — полином, имеющий корень z_0 кратности k. Тогда для произвольного достаточно малого ρ существует такое δ что, каков бы ни был полином $\psi(z)$, удовлетворяющий на окружности $|z-z_0| = \rho$ неравенству $|\psi(z)| < \delta$, внутри круга $|z-z_0| < \rho$ полином $\varphi(z) + \psi(z)$ имеет ровно k корней (теорема о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов).

***796.** Если $\varphi(x)$ — полином или рациональная функция с вещественными коэффициентами, имеющая кратный вещественный корень x_0, то, при достаточно малом $t > 0$, функция $\varphi(x) + t$ или $\varphi(x) - t$ имеет невещественные корни.

***797.** Если $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые полиномы с вещественными коэффициентами и при любых вещественных a и b все корни полиномов $af(x)+bg(x)$ вещественны, то корни полиномов $f(x)$ и $g(x)$ разделяются.

***798.** Если (в прежних обозначениях) все корни полинома $f(x)+ig(x)$ лежат в верхней полуплоскости, то все корни полиномов $(af+bg)+i(cf+dg)$ при $ad-bc>0$ лежат в верхней полуплоскости, а при $ad-bc<0$ — в нижней.

***799.** Если все корни полинома $f(z)$ лежат в верхней полуплоскости, то и все корни его производной находятся в верхней полуплоскости.

***800.** Если все корни полинома $f(x)$ расположены в некоторой полуплоскости, то все корни производной расположены в той же полуплоскости.

***801.** Корни производной полинома $f(x)$ заключены внутри любого выпуклого контура, содержащего внутри себя все корни полинома $f(x)$.

***802.** Если корни полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ все вещественные и разделяются, то корни их производных разделяются.

***803.** Для того чтобы вещественные части всех корней полинома

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

с вещественными коэффициентами были одного знака, необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов

$$x^n-a_2x^{n-2}+a_4x^{n-4}-\ldots$$

и

$$a_1x^{n-1}-a_3x^{n-3}+\ldots$$

были все вещественны и разделялись.

***804.** Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вещественные части всех корней уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ с вещественными коэффициентами были отрицательными.

***805.** Найти необходимые и достаточные условия для отрицательности вещественных частей всех корней уравнения $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ с вещественными коэффициентами.

***806.** Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы все корни уравнения с вещественными коэффициентами $x^3+ax^2+bx+c=0$ не превосходили по модулю единицы.

§ 4. Различные задачи о распределении корней полиномов

***807.** Доказать, что полином $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{m-1}x^{n-m+1}-b_mx^{n-m}-\ldots-b_n$ при $a_i\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$, $b_m>0$ имеет единственный положительный корень.

808. Доказать, что модули корней полинома $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ не превосходят единственного положительного корня уравнения $b_0x^n-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\ldots-b_n$, где $0<b_0\leqslant|a_0|$, $b_1\geqslant|a_1|$, $b_2\geqslant|a_2|$, ..., $b_n\geqslant|a_n|$.

809. Пусть $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{m-1}x^{n-m+1}+a_mx^{n-m}+\ldots+a_n$ — полином с вещественными коэффициентами, причем $a_0>0$, $a_1\geqslant 0$, ..., $a_{m-1}\geqslant 0$, $a_m<0$. Доказать, что вещественные корни полинома $f(x)$ не превосходят единственного положительного корня полинома, который получится из $f(x)$ выбрасыванием всех членов с положительными коэффициентами после a_mx^{n-m}.

***810.** Доказать, что если $a_0\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant 0$, то все корни полинома $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ не превосходят по модулю единицы.

***811.** Определить число вещественных корней полинома

$$nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1.$$

812. Доказать, что если все корни полиномов $f(x)-a$ и $f(x)-b$ вещественны, то все корни полинома $f(x)-\lambda$ вещественны, если λ заключено между a и b.

813. Два коэффициента $a_1>0$ и $a_4>0$ полинома $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ заданы. Требуется определить вещественные a_2 и a_3 так, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости и ближайший к мнимой оси был бы возможно дальше.

814. Доказать, что если все корни полинома $f(x)$ вещественны, то все корни полинома $f(x)+\lambda f'(x)$ вещественны при любом вещественном λ.

***815.** Доказать, что если все корни полинома $f(x)$ вещественны и все корни полинома $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ вещественны, то все корни полинома

$$F(x)=a_0f(x)+a_1f'(x)+\ldots+a_nf^{(n)}(x)$$

вещественны.

***816.** Доказать, что если все корни полинома $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ вещественны, то все корни полинома

$$a_0x^n + a_1mx^{n-1} + a_2m(m-1)x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + a_nm(m-1)\ldots(m-n+1)$$

вещественны при любом целом положительном m.

***817.** Доказать, что если все корни полинома $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны, то все корни полинома

$$G(x) = a_0x^n + C_n^1a_1x^{n-1} + C_n^2a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

вещественны.

818. Доказать вещественность всех корней полинома

$$x^n + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^2 x^{n-2} + \ldots + 1.$$

***819.** Доказать, что если все корни полинома $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ вещественны и одного знака, то все корни полинома

$$a_0\cos\varphi + a_1\cos(\varphi+\theta)x + \\ + a_2\cos(\varphi+2\theta)x^2 + \ldots + a_n\cos(\varphi+n\theta)x^n$$

вещественны.

***820.** Пусть $f(z)$ — полином или дробная рациональная функция. Доказать, что если a является корнем $f(z) - f(a)$ кратности k и $f(a) \neq 0$, то при достаточно малом ρ на окружности $|z-a| = \rho$ найдется $2k$ точек, в которых $|f(z)| = |f(a)|$.

***821.** Доказать, что если a является корнем $f(z) - f(a)$ кратности k, то при достаточно малом ρ на окружности $|z-a| = \rho$ найдется $2k$ точек, в которых $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(a))$, и $2k$ точек, в которых $\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(a))$. Здесь $f(z)$ — полином или дробная рациональная функция.

***822.** Доказать, что если $f(x)$ — полином степени n с вещественными корнями, то все корни уравнения $[f(x)]^2 + k^2[f'(x)]^2 = 0$ имеют мнимую часть, меньшую kn по абсолютной величине.

§ 5. Приближенное вычисление корней полинома

823. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения $x^3 - 3x^2 - 13x - 7 = 0$, содержащийся в промежутке $(-1, 0)$.

824. Вычислить с точностью до 0,000001 вещественный корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$.

825. Вычислить с точностью до 0,0001 вещественные корни уравнений:

a) $x^3-10x-5=0$; b) $x^3+2x-30=0$;
c) $x^3-3x^2-4x+1=0$; d) $x^3-3x^2-x+2=0$.

826. Полусферу радиуса 1 разделить на две равновеликие части плоскостью, параллельной основанию.

827. Вычислить с точностью до 0,0001 положительный корень уравнения $x^3-5x-3=0$.

828. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения:

a) $x^4+3x^3-9x-9=0$, содержащийся в премежутке $(1, 2)$;

b) $x^4-4x^3+4x^2-4=0$, содержащийся в промежутке $(-1, 0)$;

c) $x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$, содержащийся в промежутке $(0, 1)$;

d) $x^4-10x^2-16x+5=0$, содержащийся в промежутке $(0, 1)$;

e) $x^4-x^3-9x^2+10x-10=0$, содержащийся в промежутке $(-4, -3)$;

f) $x^4-6x^2+12x-8=0$, содержащийся в промежутке $(1, 2)$;

g) $x^4-3x^2+4x-3=0$, содержащийся в промежутке $(-3, -2)$;

h) $x^4-x^3-7x^2-8x-6=0$, содержащийся в промежутке $(3, 4)$.

i) $x^4-3x^3+3x^2-2=0$, содержащийся в промежутке $(1, 2)$.

829. Вычислить с точностью до 0,0001 вещественные корни уравнений:

a) $x^4+3x^3-4x-1=0$;
b) $x^4+3x^3-x^2-3x+1=0$;
c) $x^4-6x^3+13x^2-10x+1=0$;
d) $x^4-8x^3-2x^2+16x-3=0$;
e) $x^4-5x^3+9x^2-5x-1=0$;
f) $x^4-2x^3-6x^2+4x+4=0$;
g) $x^4+2x^3+3x^2+2x-2=0$;
h) $x^4+4x^3-4x^2-16x-8=0$.