ГЛАВА VIII

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## § 1. Базис, размерность, подпространства

**927.** Доказать, что множество всех функций со значениями в данном поле $K$, определенных на множестве из $n$ элементов, составляет $n$-мерное векторное пространство над полем $K$ по отношению к действиям сложения функций и умножения на константу из $K$.

**928.** В пространстве строк над числовым полем дана система векторов $f_1, \ldots, f_m$. Выделить максимальную линейно независимую подсистему и выразить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов выделенной подсистемы:

a) $f_1=(2, 2, 7, -1)$, $f_2=(3, -1, 2, 4)$, $f_3=(1, 1, 3, 1)$;

b) $f_1=(3, 2, -5, 4)$, $f_2=(3, -1, 3, -3)$, $f_3=(3, 5, -13, 11)$;

c) $f_1=(2, 3, -4, -1)$, $f_2=(1, -2, 1, 3)$, $f_3=(5, -3, -1, 8)$, $f_4=(3, 8, -9, -5)$;

d) $f_1=(2, 1, -1, 1)$, $f_2=(1, 2, 1, -1)$, $f_3=(1, 1, 2, 1)$;

e) $f_1=(2, 1)$, $f_2=(3, 2)$, $f_3=(1, 1)$, $f_4=(2, 3)$;

f) $f_1=(2, 1, -3)$, $f_2=(3, 1, -5)$, $f_3=(4, 2, -1)$, $f_4=(1, 0, -7)$;

g) $f_1=(2, 3, 5, -4, 1)$, $f_2=(1, -1, 2, 3, 5)$, $f_3=(3, 7, 8, -11, -3)$, $f_4=(1, -1, 1, -2, 3)$;

h) $f_1=(2, -1, 3, 4, -1)$, $f_2=(1, 2, -3, 1, 2)$, $f_3=(5, -5, 12, 11, -5)$, $f_4=(1, -3, 6, 3, -3)$;

i) $f_1=(1, 2, 1, -2, 1)$, $f_2=(2, -1, 1, 3, 2)$, $f_3=(1, -1, 2, -1, 3)$, $f_4=(2, 1, -3, 1, -2)$, $f_5=(1, -1, 3, -1, 7)$;

j) $f_1=(4, 3, -1, 1, -1)$, $f_2=(2, 1, -3, 2, -5)$, $f_3=(1, -3, 0, 1, -2)$, $f_4=(1, 5, 2, -2, 6)$.

**929.** В пространстве строк над числовым полем заданы векторы $f_1$, $f_2$, $f_3$ и $f_4$. Можно ли принять $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ за базис? Каковы координаты вектора $x$ в этом базисе?

a) $f_1=(1, 1, 1, 1)$, $f_2=(1, 1, -1, -1)$, $f_3=(1, -1, 1, -1)$, $f_4=(1, -1, -1, 1)$; $x=(1, 2, 1, 1)$.

b) $f_1=(1, 1, 0, 1)$, $f_2=(2, 1, 3, 1)$, $f_3=(1, 1, 0, 0)$, $f_4=(0, 1, -1, -1)$; $x=(0, 0, 0, 1)$.

***930.** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис векторного пространства $S$ и пусть $e_{n+1}=-e_1-\ldots-e_n$. Доказать, что любой вектор из $S$ может быть представлен в виде $a_1e_1+\ldots+a_ne_n+a_{n+1}e_{n+1}$ с коэффициентами, удовлетворяющими условию $a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}=0$, и такое представление единственно.

***931.** В условиях предыдущей задачи ясно, что каждая система векторов, получающаяся из $e_1, \ldots, e_{n+1}$ выбрасыванием одного из них, будет базисом. Допустим, что $S$ — вещественное пространство. Доказать, что любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами в одном из перечисленных базисов и такое представление единственно. Дать геометрическое доказательство этого факта при $n=2$ и $n=3$.

***932.** Сколько существует базисов в $n$-мерном пространстве над полем GF $(q)$.

**933.** Найти базис и размерность подпространства пространства строк, натянутого на данную систему векторов:

a) $f_1=(2, 1, 3, 1)$, $f_2=(1, 2, 0, 1)$, $f_3=(-1, 1, -3, 0)$;

b) $f_1=(2, 0, 1, 3, -1)$, $f_2=(1, 1, 0, -1, 1)$, $f_3=(0, -2, 1, 5, -3)$, $f_4=(1, -3, 2, 9, -5)$;

c) $f_1=(2, 1, 3, -1)$, $f_2=(-1, 1, -3, 1)$, $f_3=(4, 5, 3, -1)$, $f_4=(1, 5, -3, 1)$.

**934.** Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств пространства строк, натянутых на системы векторов $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$, и найти базисы этих подпространств, включающие базис пересечения:

a) $f_1=(1, 2, 1, 0)$, $f_2=(-1, 1, 1, 1)$; $g_1=(2, -1, 0, -1)$, $g_2=(1, -1, 3, 7)$.

b) $f_1=(1, 2, -1, -2)$, $f_2=(3, 1, 1, 1)$, $f_3=(-1, 0, 1, -1)$; $g_1=(2, 5, -6, -5)$, $g_2=(-1, 2, -7, -3)$.

c) $f_1=(1, 1, 0, 0)$, $f_2=(1, 0, 1, 1)$; $g_1=(0, 0, 1, 1)$, $g_2=(0, 1, 1, 0)$.

d) $f_1=(1, 1, 1, 1, 1)$, $f_2=(1, -1, 1, -1, 1)$, $f_3=(2, 1, -1, 1, 2)$; $g_1=(-1, 2, 1, 1, 0)$, $g_2=(1, 0, 4, 0, 1)$.

e) $f_1=(1, 1, 1, 0)$, $f_2=(1, 1, 0, 1)$, $f_3=(1, 0, 1, 1)$; $g_1=(1, 1, -1, -1)$, $g_2=(1, -1, 1, -1)$, $g_3=(1, -1, -1, 1)$.

**935.** Что представляет собой сумма и пересечение следующих подпространств $P$ и $Q$ пространства $M$ квадратных матриц:

a) $P$ — пространство симметрических матриц, $Q$ — пространство верхних треугольных матриц;

b) $P$ — пространство симметрических матриц, $Q$ — пространство антисимметрических матриц (здесь характеристика поля считается $\neq 2$);

c) $P$ — пространство циклических матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

$Q$ — пространство верхних треугольных матриц.

**936.** Составить формулы преобразования координат при переходе от базиса $f_1, f_2, f_3, f_4$ к базису $g_1, g_2, g_3, g_4$ (здесь рассматривается пространство столбцов):

a) $$f_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$g_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad g_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad g_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad g_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$$

b) $$(f_1, f_2, f_3, f_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(g_1, g_2, g_3, g_4)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**937.** Уравнение гиперповерхности в естественном базисе пространства столбцов имеет вид $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=1$. Найти уравнение этой поверхности относительно базиса

$$(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

**938.** Указать какой-либо базис факторпространства $S/P$, где $S$ — четырехмерное пространство строк, $P$ натянуто на систему векторов $\{f_i\}$:

a) $f_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $f_2=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$;
b) $f_1=(1,\ -1,\ 2,\ -1)$, $f_2=(1,0,0,1)$, $f_3=(1,1,1,1)$

***939.** Сколько $m$-мерных подпространств существует в $n$-мерном пространстве над полем $\mathrm{GF}(q)$?

***940.** Сколько $m$-мерных подпространств $n$-мерного пространства над полем $\mathrm{GF}(q)$ имеет нулевое пересечение с данным $k$-мерным подпространством?

***941.** Пусть $P_1$, $P_2$, $P_3$ — три подпространства конечномерного пространства $S$, причем $P_1\subset P_3$. Доказать, что

$$P_1+(P_2\cap P_3)=(P_1+P_2)\cap P_3.$$

***942.** Доказать, что

$$(P_2+P_3)\cap(P_3+P_1)\cap(P_1+P_2)=\\ =(P_3+P_1)\cap P_2+(P_1+P_2)\cap P_3.$$

***943.** Пусть $P_1$, $P_2$, $P_3$ — три подпространства конечномерного пространства $S$ и пусть $d_k=\dim(P_i+P_j)\cap P_k+ +\dim(P_i\cap P_j)$, здесь $i$, $j$, $k$ — произвольная перестановка чисел 1, 2, 3. Доказать, что $d_1=d_2=d_3$.

***944.** Пусть $P_1$, $P_2$, $P_3$ — подпространства конечномерного пространства $S$. Доказать, что подпространство $(P_2\cap P_3)+(P_3\cap P_1)+(P_1\cap P_2)$ содержится в подпространстве $(P_2+P_3)\cap(P_3+P_1)\cap(P_1+P_2)$ и разность размерностей этих подпространств есть четное число.

***945.** Пусть $0=U_0\subset U_1\subset U_2\subset\ldots\subset U_{n-1}\subset U_n=S$ — полный флаг, т. е. последовательность вложенных подпространств пространства $S$. Пусть, далее, $P$ — подпространство, $\dim P\geqslant 1$. Доказать, что найдется такой номер $k$, что $U_k\subset U_{k-1}+P$.

**946.** Пусть $f_1$ и $f_2$ — взаимно простые полиномы из $K[x]$ степеней $m_1$ и $m_2$ и $S \subset K[x]$ — пространство полиномов, степени которых не превосходят $m_1+m_2-1$. Доказать, что $S=S_1 \oplus S_2$, где $S_i$ — пространство полиномов из $S$, делящихся на $f_i$, $i=1, 2$.

**947.** Пусть $S=P_1 \oplus P_2$ и $Q$ — одномерное подпространство $S$, имеющее нулевое пересечение как с $P_1$, так и с $P_2$. Найти размерность $(P_1+Q) \cap (P_2+Q)$ и указать какой-либо базис этого пространства.

**948.** Обобщить предыдущую задачу на случай, когда $\dim Q=k \geqslant 1$.

***949.** Пусть $S=P_1 \oplus P_2$ — пространство над полем $\mathrm{GF}(q)$, $\dim P_1=m_1$, $\dim P_2=m_2$. Найти число $k$-мерных подпространств $Q$, имеющих нулевое пересечение как с $P_1$, так и с $P_2$.

**950.** Доказать, что пространство вещественных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ есть прямая сумма пространства констант и пространства функций, обращающихся в 0 в данной точке $x_0$, $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$.

**951.** Доказать, что пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ есть прямая сумма пространства полиномов, степень которых не превосходит $k-1$ и пространства функций, обращающихся в 0 в данных точках $x_1, \ldots, x_k$; $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant 1$.

**952.** Доказать, что пространство полиномов $K[x]$ есть прямая сумма пространства полиномов, делящихся на данный полином $\varphi \in K[x]$, и пространства полиномов, степени которых меньше степени $\varphi$.

В следующих задачах рассматриваются линейные многообразия, т. е. «сдвинутые» подпространства $x_0+P$, где $x_0$ — фиксированный вектор, $P$ — подпространство. Одномерные линейные многообразия называются прямыми, двумерные — плоскостями, более высокой размерности — гиперплоскостями. Нульмерные линейные многообразия (т. е. векторы) в этом контексте удобно называть точками.

**953.** Доказать, что для того, чтобы многообразия $x_1+P_1$ и $x_2+P_2$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы $P_1=P_2$ и $x_2-x_1 \in P_1$.

**954.** Доказать, что через две несовпадающие точки $x_1$ и $x_2$ проходит одна и только одна прямая, именно множество $\{(1-c)\,x_1+cx_2\}$.

***955.** Доказать, что для того, чтобы множество $M$ точек было линейным многообразием, необходимо и достаточно, чтобы вместе с точками $x_1$ и $x_2$ множеству $M$ принадлежали все точки $(1-c)x_1+cx_2$ (т. е. вся прямая, проходящая через $x_1$ и $x_2$). Предполагается, что поле $K$ содержит больше двух элементов (т. е. не является полем GF (2)).

**956.** Найти пересечение линейных многообразий $x_0+P$ и $y_0+Q$ в пространстве $S$, в предположении, что $S=P\oplus Q$.

**957.** Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы многообразия $x_0+P$ и $y_0+Q$ имели непустое пересечение.

**958.** При выполнении условия предыдущей задачи найти пересечение многообразий $x_0+P$ и $y_0+Q$.

**959.** Что можно сказать о размерности наименьшего линейного многообразия, содержащего две данных прямые в $n$-мерном пространстве.

**960.** В четырехмерном пространстве найти прямую, проходящую через начало координат и пересекающую прямые:

$$x_1=2+3t,\quad x_2=1-t,\quad x_3=-1+2t,\quad x_4=3-2t$$

и

$$x_1=7t,\qquad x_2=1,\qquad x_3=1+t,\qquad x_4=-1+2t.$$

Найти точки пересечения этой прямой с данными прямыми.

**961.** Исследовать в общем виде условие разрешимости задачи 960 для двух прямых в $n$-мерном пространстве.

**962.** Найти наименьшее линейное многообразие, содержащее многообразия $x_0+P$ и $y_0+Q$. Что можно сказать о его размерности?

**963.** Известно, что в трехмерном пространстве (и, в силу результата задачи 959, в $n$-мерном при $n\geqslant 3$) имеются четыре возможности взаимного расположения двух прямых — они могут совпадать, быть параллельными, пересекаться в точке и скрещиваться. Описать возможные расположения двух плоскостей $x_0+P$ и $y_0+Q$ в пятимерном пространстве. В основу классификации положить размерность $k$ наименьшего линейного многообразия, содержащего обе плоскости.

**964.** Дать аналогичную классификацию взаимного расположения двух линейных многообразий $x_0+P$ и $y_0+Q$ размерностей $m_1$ и $m_2$, $m_1\geqslant m_2$.

**965.** Найти наименьшее линейное многообразие, содержащее векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

## § 2. Линейные отображения и операторы. Образ, ядро, полуобратный оператор

В дальнейшем термины «линейное отображение» и «линейный оператор» будут рассматриваться как синонимы, однако первому термину будет отдаваться предпочтение, если речь идет об отображении из одного пространства в другое, второму — для отображений из пространства в себя. Отображение (оператор) $A\colon S \longrightarrow T$ задается матрицей из координат образов базиса пространства $S$ относительно базиса пространства $T$. Если базисы зафиксированы, мы не будем различать в обозначениях оператор и соответствующую ему матрицу.

**966.** Линейное отображение из пространства столбцов $S$ в пространство столбцов $T$ задается умножением слева на матрицу $A$. В следующих примерах найти ядро отображения:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$;

g) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

**967.** Для тех же примеров найти базис образа.

**968.** Для тех же примеров найти невырожденные матрицы $C$ и $D$ такие, что $C^{-1}AD=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $E$ — единичная матрица, порядок которой равен рангу $A$, а $0$ — нулевая матрица.

**969.** Доказать изоморфизм пространств $AS$ и $S/\ker A$.

**970.** Отображение пространства $S$ в пространство $R$ называется эпиморфным, если образом является все $R$; отображение пространства $R$ в пространство $T$ называется мономорфным, если его ядро состоит только из нуля. Доказать, что ранг матрицы эпиморфного отображения равен числу ее строк, ранг матрицы мономорфного отображения равен числу ее столбцов.

**971.** Доказать, что линейное отображение $A\colon S\to T$ можно представить в виде произведения эпиморфного отображения $S\to R$ и мономорфного $R\to T$, где $R$ — некоторое пространство, размерность которого равна рангу отображения $A$.

**972.** Дать истолкование результата предыдущей задачи в алгебраических терминах.

**973.** Отметив, что в качестве первой матрицы в ответе к предыдущей задаче можно взять любой базис пространства, натянутого на столбцы данной матрицы (т. е. базис образа), а в качестве второй — матрицу коэффициентов в выражении всех столбцов через выбранные базисные, выполнить разложение для примеров а) — g) задачи 966.

**974.** Пусть $A\colon S\to T$ — линейное отображение и $P$ — подпространство $S$. Доказать, что $\dim AP=\dim P-\dim P\cap Q$, где $Q=\ker A$.

**975.** Пусть $P$ — подпространство пространства $T$, $\dim P=p$, $\dim T=m$ и $A\colon T\to S$ — линейное отображение ранга $r$. Доказать, что $p+r-m\leqslant \dim AP\leqslant \min(p,\ r)$.

***976.** Пусть $A_1\colon S\to T$ и $A_2\colon T\to R$ — линейные отображения рангов $r_1$ и $r_2$, $\dim T=m$, $\rho=\dim A_2A_1S$. Доказать, что $r_1+r_2-m\leqslant\rho\leqslant\min(r_1,\ r_2)$.

**977.** Пусть $A\colon S\to T$ — линейное отображение, $P$ и $Q$ — два подпространства $S$. Найти, в терминах пространства $S$, необходимое и достаточное условие для выполнения равенства $AP=AQ$.

**978.** Пусть $A\colon S\to T$ — линейное отображение, $P$ и $Q$ — два подпространства $S$, причем $P\subset Q$. Доказать, что $\dim AQ-\dim AP\leqslant\dim Q-\dim P$.

**979.** Пусть $S$, $U$, $T$ — векторные пространства и даны линейные отображения $C\colon S\to T$ и $B\colon U\to T$. Когда существует такое линейное отображение $Y\colon S\to U$, что $C=BY$?

**980.** Пусть $S$, $U$, $T$ — векторные пространства и даны линейные отображения $C\colon S\to T$ и $A\colon S\to U$. Когда существует такое линейное отображение $X\colon U\to T$, что $C=XA$?

**981.** Пусть $S$, $U$, $V$, $T$ — векторные пространства и даны линейные отображения $A\colon S \to U$, $B\colon V \to T$ и $C\colon S \to T$. Когда существует такое линейное отображение $Z\colon U \to V$, что $C = BZA$.

***982.** Пусть $S$ и $T$ — векторные пространства размерностей $n$ и $m$ над полем $\mathrm{GF}(q)$:

a) сколько существует линейных отображений $S \to T$;

b) сколько существует мономорфных линейных отображений $S \to T$;

c) сколько существует эпиморфных линейных отображений $S \to T$;

d) сколько существует линейных отображений $S \to T$ ранга $r$.

**983.** Пусть векторное подпространство $S$ — прямая сумма подпространств $P$ и $Q$: $S = P \oplus Q$. Тогда каждый вектор $z \in S$ однозначно представляется в виде $x + y$, где $x \in P$, $y \in Q$. Отображение $A\colon z \to x$ есть, очевидно, линейный оператор, называющийся оператором проектирования $S$ на $P$ параллельно $Q$. Доказать, что оператор $A$ идемпотентен, т. е. $A^2 = A$, и указать его ядро и образ.

***984.** Доказать, что любой идемпотентный оператор есть оператор проектирования.

**985.** Пусть $A\colon S \to T$ — эпиморфное линейное отображение и пусть $P$ — какое-либо дополнительное к $\ker A$ подпространство (т. е. такое, что $S = \ker A \oplus P$). Рассмотрим линейное отображение $B\colon T \to S$, отображающее векторы из $T$ на их прообразы (единственные, почему?) в $P$. Что представляют собой операторы $AB$ и $BA$ и отображения $ABA$ и $BAB$?

**986.** Пусть $A\colon S \to T$ — мономорфное линейное отображение и $Q$ — какое-либо дополнение $AS$ в $T$. Рассмотрим отображение $B\colon T \to S$, сопоставляющее каждому вектору из $T$ прообраз его проекции на $AS$ (параллельно $Q$). Установить линейность $B$ и выяснить, что представляют собой операторы $AB$ и $BA$ и отображения $ABA$ и $BAB$.

**987.** Пусть $A\colon S \to T$ — произвольное линейное отображение, $P$ — какое-либо дополнение к $\ker A$ в $S$ и $Q$ — какое-либо дополнение $AS$ в $T$. Рассмотрим отображение $B\colon T \to S$, сопоставляющее каждому вектору $y \in T$ вектор из $S$, являющийся прообразом в $P$ проекции $y$ на $AS$ параллельно $Q$. Выяснить, что представляют собой операторы $AB$ и $BA$ и отображения $ABA$ и $BAB$.

*988. Для оператора $A: S \longrightarrow T$ полуобратным (рефлексивно полуобратным) называется оператор $B: T \longrightarrow S$, удовлетворяющий требованиям $ABA = A$ и $BAB = B$. Доказать, что любой полуобратный оператор может быть получен посредством конструкции, описанной в предыдущей задаче.

989. Доказать существование полуобратного оператора, исходя из задачи 981.

*990. Оператор $A^{(-1)}: S \longrightarrow S$ называется коммутирующим полуобратным для данного оператора $A: S \longrightarrow S$, если $AA^{(-1)} = A^{(-1)}A$, $AA^{(-1)}A = A$ и $A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}$. Выяснить условие существования $A^{(-1)}$, установить при этом условии единственность $A^{(-1)}$ и соотношение $(A^{(-1)})^{(-1)} = A$.

991. Если $m \times n$-матрица $A$ ранга $r$ равна произведению $m \times r$-матрицы $B$ на $r \times n$-матрицу $C$ (обе ранга $r$), то произведение их полуобратных в обратном порядке дает одну из полуобратных матриц для $A$.

992. Пусть $D$ — оператор дифференцирования в пространстве полиномов (характеристика поля констант равна нулю) степени, не превосходящей $n$. Убедиться в несуществовании $D^{(-1)}$ и построить какой-либо полуобратный оператор.

993. В пространстве тригонометрических полиномов $\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt\right\}$ степени $n$ задан оператор дифференцирования. Найти $D^{(-1)}$.

994. Пусть $A$ — квадратная $m \times m$-матрица ранга $r$. В пространстве $m \times n$-матриц рассмотрим оператор левого умножения на $A$. Найти размерность его ядра.

995. Пусть $A$ — квадратная $m \times m$-матрица. Пусть $Q$ — подпространство верхних треугольных матриц в пространстве всех $m \times m$-матриц. Чему равна размерность пространства $L_A Q$, где $L_A$ — оператор умножения слева на $A$.

996. Система подпространств $P_1, \ldots, P_k$ пространства $S$ называется эквивалентной системе подпространств $Q_1, \ldots, Q_k$, если существует невырожденный оператор $A: S \longrightarrow S$, который переводит $P_1$ в $Q_1, \ldots, P_k$ в $Q_k$. Найти условие эквивалентности пар подпространств $(P_1, P_2)$ и $(Q_1, Q_2)$.

997. Даны два флага $0 = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k = S$ и $0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_l = S$ (не предполагается, что раз-

мерности идут подряд, допускаются пропуски и повторения). Найти условия эквивалентности этих двух флагов.

***998.** Доказать, что полной системой инвариантов пары флагов $F: 0=P_0\subset P_1\subset\ldots\subset P_k=S$ и $\Phi$: $0=Q_0\subset Q_1\subset\ldots\subset Q_l=S$ является матрица $b_{ij})$, $i=1, \ldots, k$; $j=1, \ldots, l$, из неотрицательных чисел $b_{ij}=\dim P_i\cap Q_j-\dim((P_i\cap Q_{j-1})+(P_{i-1}\cap Q_j))$, т. е. пары флагов $F$, $\Phi$ и $F'$, $\Phi'$ эквивалентны, если совпадают их инварианты.

***999.** Найти полную систему инвариантов для тройки $(P_1, P_2, P_3)$ подпространств пространства $S$.

**1000.** Аффинным преобразованием пространства $S$ называется преобразование $F: S\to S$, действующее по формуле $F(x)=x_0+Ax$, где $A$ — линейный оператор, $x_0$ — фиксированный вектор. Доказать, что аффинное преобразование обратимо в том и только в том случае, если оператор $A$ невырожден, и найти обратное преобразование.

**1001.** Доказать, что невырожденные аффинные преобразования образуют группу, имеющую нормальным делителем группу параллельных переносов $Tx=x_0+x$.

**1002.** Подмножества $L$ и $M$ в $S$ называются аффинно эквивалентными, если существует невырожденное аффинное преобразование, отображающее $L$ на $M$.

Доказать, что любые две симплициальные системы точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в $n$-мерном пространстве аффинно эквивалентны (система точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называется симплициальной, если векторы $x_1-x_0, \ldots, x_n-x_0$ линейно независимы).

**1003.** Доказать, что любые два линейных многообразия одинаковой размерности аффинно эквивалентны.

**1004.** Доказать, что любые две тройки прямых «общего положения» в трехмерном пространстве (т. е. попарно скрещивающихся и не параллельных одной плоскости) аффинно эквивалентны.

## § 3. Теоретические основы приведения матрицы оператора к каноническому виду

***1005.** Пусть $A$: $S\to S$ — линейный оператор и $x\in S$. Аннулятором вектора $x$ назовем такой полином $f(t)$, что $f(A)x=0$. Доказать, что все аннуляторы данного вектора делятся на минимальный аннулятор, т. е. на аннулятор наименьшей степени.

**1006.** Пусть $A$ — линейный оператор некоторого векторного пространства $S$, векторы $x, Ax, \ldots, A^{k-1}x$ ($x \in S$) линейно независимы, $A^k x$ является их линейной комбинацией: $A^k x = c_1 A^{k-1}x + \ldots + c_k x$. Тогда подпространство $P$, натянутое на $x, Ax, \ldots, A^{k-1}x$, инвариантно, а полином $t^k - c_1 t^{k-1} - \ldots - c_k$ есть минимальный аннулятор вектора $x$. Доказать это. Так построенное подпространство $P$ называется циклическим подпространством относительно оператора $A$, порожденным вектором $x$.

***1007.** Доказать, что характеристический полином оператора на всем пространстве делится на характеристический полином на инвариантном подпространстве.

***1008.** Вычислить характеристический полином оператора на циклическом подпространстве, порожденном вектором $x$.

***1009.** Доказать, что оператор является корнем своего характеристического полинома (теорема Гамильтона — Кэли в терминах операторов).

***1010.** Доказать, что если пространство есть прямая сумма двух или нескольких инвариантных подпространств, то характеристический полином на всем пространстве равен произведению характеристических полиномов на прямых слагаемых.

***1011.** Пусть пространство $S$ есть сумма двух инвариантных подпространств $P_1$ и $P_2$. Связать характеристический полином на всем пространстве с характеристическими полиномами на данных инвариантных подпространствах и на их пересечении.

***1012.** Пусть пространство $S$ есть сумма инвариантных подпространств $P_1, \ldots, P_k$. Доказать, что характеристический полином на $S$ делит произведение характеристических полиномов на $P_1, \ldots, P_k$.

***1013.** Если система векторов $z_1, \ldots, z_k$ пространства $S$ такова, что $P_1 + \ldots + P_k = S$, где $P_1, \ldots, P_k$ — циклические относительно оператора $A$ подпространства, порожденные векторами $z_1, \ldots, z_k$, то эта система называется системой операторных образующих для $S$ (например, системой операторных образующих является любой базис $S$). Доказать, что характеристический полином оператора $A$ на всем пространстве есть делитель произведения минимальных аннуляторов системы образующих.

***1014.** Пусть оператор $A$ действует в векторном пространстве $S$ над полем $K$. Если все векторы имеют аннуляторами степень одного и того же неприводимого в $K$ полинома $\varphi$, то и характеристический полином есть степень $\varphi$. Доказать это. Такое пространство $S$ назовем примарным относительно $A$.

***1015.** Доказать, что ядро и образ оператора $f(A)$, где $f$ — любой полином, инвариантны относительно $A$.

***1016.** Доказать, что если аннулятор $f(t)$ вектора $x$ равен произведению взаимно простых полиномов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то $x$ однозначно представляется в виде суммы $x_1+x_2$ векторов, аннулируемых полиномами $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

***1017.** Распространить утверждение задачи 1016 на случай, когда аннулятор $f(t)$ вектора $x$ равен $f_1(t)f_2(t)\ldots$ $\ldots f_k(t)$, с попарно взаимно простыми $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

***1018.** Пусть характеристический полином оператора $A$, действующего в пространстве $S$ над полем $K$, имеет каноническое разложение $\varphi_1^{m_1}\varphi_2^{m_2}\ldots\varphi_k^{m_k}$, где $\varphi_i$ — неприводимые полиномы. Доказать, что $S$ раскладывается в прямую сумму $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_k$ примарных подпространств, векторы которых аннулируются, соответственно, полиномами $\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \ldots, \varphi_k^{m_k}$.

***1019.** Доказать, что в условиях предыдущей задачи характеристические полиномы оператора $A$ на подпространствах $P_i$ равны $\varphi_i^{m_i}$, $i=1, \ldots, k$.

**1020.** Пусть $Q$ — примарное циклическое относительно оператора $A$ пространство с аннулятором $\varphi^m$. Доказать, что $\ker \varphi^l(A) = \varphi^{m-l}(A)Q$.

***1021.** Доказать, что примарное пространство разлагается в прямую сумму циклических примарных подпространств.

**1022.** Пусть $Q$ — примарное циклическое относительно оператора $A$ пространство с аннулятором $\varphi^m(t)$, $\varphi(t) = t^k+a_1t^{k-1}+\ldots+a_k$. Записать матрицу оператора $A$ в базисе $x, Ax, \ldots, A^{k-1}x, \varphi(A)x, A\varphi(A)x, \ldots, A^{k-1}\varphi(A)x, \ldots$ $\ldots, \varphi^{m-1}(A)x, A\varphi^{m-1}(A)x, \ldots, A^{k-1}\varphi^{m-1}(A)x$.

**1023.** Специализировать результат задачи 1022 для $\varphi(t)=t-\lambda$.

***1024.** Доказать, что для оператора, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица оператора квазидиагональна и состоит из канонических жордановых блоков (каноническая форма Жордана).

**1025.** Перенести предложения, сформулированные в задачах 1005, 1007, 1008, 1010—1013, 1015—1020 в теорию конечных абелевых групп, используя следующий «словарь»:

| | |
|---|---|
| пространство с оператором | конечная абелева группа |
| векторы | элементы группы |
| полином | целое число |
| характеристический полином | порядок группы |
| инвариантное подпространство | подгруппа |
| факторпространство по инвариантному | факторгруппа |
| минимальный аннулятор вектора | порядок элемента |
| циклическое подпространство | циклическая подгруппа |
| система образующих | система образующих |
| неприводимый полином | простое число |
| примарное подпространство | $p$-подгруппа |

**1026.** Доказать, что если минимальные аннуляторы векторов $x_1, \ldots, x_k$ попарно взаимно просты, то минимальный аннулятор вектора $x_1 + \ldots + x_k$ равен их произведению.

***1027.** Минимальным полиномом для оператора (или матрицы) $A$ называется полином $f$ наименьшей степени, аннулирующий оператор, т. е. такой, что $f(A) = 0$. Доказать, что:

a) минимальный полином оператора есть наименьшее общее кратное минимальных аннуляторов векторов пространства;

b) существует вектор $x_0$, минимальный аннулятор которого равен минимальному полиному.

**1028.** Пусть пространство $S$ циклично и характеристический полином его равен $f(t) = f_1(t) f_2(t)$. Доказать, что $\ker f_1(A) = f_2(A) S$.

***1029.** Доказать, что пространство $S$ над $K$ с оператором $A$ можно представить в виде прямой суммы циклических подпространств, аннуляторы $f_1, \ldots, f_k$ которых связаны соотношениями: $f_1$ делится на $f_2$, $f_2$ делится на $f_3, \ldots, f_{k-1}$ делится на $f_k$.

**1030.** Показать, что система образующих пространства $S$ предыдущей задачи минимальна.

**1031.** Перенести предложения задач 1026—1030 в теорию конечных абелевых групп, используя «словарь» задачи 1025.

## § 4. Собственные значения и собственные векторы, инвариантные подпространства, каноническая форма

**1032.** Найти собственные значения и собственные векторы матриц, рассматриваемых как операторы умножения слева в пространстве столбцов над полем $\mathbb{C}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$.

Найти собственные значения матриц порядка $n$:

***1033.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**1034.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**1035.** $\begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

**1036.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы ранга 1

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \dots & \alpha_2\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \dots & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

**1037.** Зная характеристические числа матрицы $A$, найти характеристические числа матрицы $A^2$.

**1038.** Доказать, что все собственные векторы матрицы $A$ являются собственными векторами матрицы $f(A)$, где $f$ — полином.

**1039.** Зная характеристический полином $F(\lambda)$ матрицы $A$ (порядка $n$), найти определитель матрицы $f(A)$, где $f(x) = b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_m)$.

**1040.** Зная характеристические числа матрицы $A$, найти определитель матрицы $f(A)$, где $f(x)$ — полином.

**1041.** Зная характеристические числа матрицы $A$, найти характеристические числа матрицы $f(A)$.

***1042.** Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

***1043.** Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, $n$ — нечетное число.

***1044.** Найти сумму

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \dots + \varepsilon^{(n-1)^2}$$

(см. предыдущую задачу).

**1045.** Пусть $A$ — вырожденный оператор и $\varphi(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-k} t^k = t^k \psi(t)$ его характеристический полином, $a_{n-k} \neq 0$. Доказать, что для того, чтобы существовал коммутирующий полуобратный оператор

$A^{(-1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $A\psi(A)=0$. При выполнении этого условия найти $A^{(-1)}$.

**1046.** Найти собственные значения и собственные векторы оператора дифференцирования, действующего в пространстве тригонометрических полиномов $\{a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt\}$ с комплексными коэффициентами.

**1047.** Привести к жордановой канонической форме матрицы, т. е. установить каноническую форму и найти матрицу, осуществляющую преобразование (столбцами преобразующей матрицы являются компоненты собственных и корневых векторов, составляющих канонический базис):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

**1048.** Установить жорданову каноническую форму для матриц

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**1049.** В пространстве полиномов второй степени от $x$ и $y$ действует оператор $A$: $f(x, y) \longrightarrow f(x+1, y+1)$. Найти его жорданову каноническую форму.

**1050.** В пространстве полиномов от $x$ и $y$, степени которых по $x$ и по $y$ не превосходят 2, действует оператор $A$: $f(x, y) \rightarrow f(x+1, y+1)$. Найти его жорданову каноническую форму.

**1051.** Доказать, что периодическая матрица $A$ (т. е. матрица, удовлетворяющая уравнению $A^m = E$ при некотором $m$) приводится к диагональной жордановой канонической форме в поле $\mathbb{C}$.

**1052.** Найти жорданову каноническую форму матрицы оператора дифференцирования, действующего в пространстве полиномов ограниченной степени над полем $\mathbb{C}$.

***1053.** В пространстве полиномов степени, не превосходящей $n-1$, от $x$, $y$ над полем $\mathbb{C}$ действует оператор $\partial = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. Найти его жорданову каноническую матрицу.

***1054.** В пространстве полиномов от $x$, $y$ над полем $\mathbb{C}$, со степенями по $x$ и $y$, не превосходящими $m-1$ и $n-1$, действует оператор $\partial = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. Найти его жорданову каноническую форму.

***1055.** Пусть $S$ — циклическое пространство относительно оператора $A$. Доказать, что все операторы, коммутирующие с $A$, являются значениями полиномов от $A$.

***1056.** Доказать, что любая квадратная матрица подобна транспонированной и преобразующая матрица может быть взята симметрической.

***1057.** Доказать, что любая матрица может быть представлена в виде произведения двух симметрических, из которых одна невырождена.

**1058.** Для того чтобы две вещественные квадратичные формы с матрицами $B_1$ и $B_2$, из которых вторая невырожденная, можно было одновременным вещественным преобразованием привести к каноническому виду, необходимо и достаточно, чтобы матрица $B_2^{-1}B_1$ имела вещественные собственные значения и приводилась к диагональной форме.

***1059.** Доказать, что матрица $A = B_1 B_2$, где $B_1$ и $B_2$ — вещественные симметрические матрицы и $B_2$ положительно определена, имеет вещественные собственные значения и может быть приведена к диагональной форме.

**1060.** Доказать, что в пространстве $S$ над полем $\mathbb{C}$ существует конечное число инвариантных относительно оператора $A$ подпространств тогда и только тогда, когда пространство $S$ циклично.

**1061.** Пусть характеристический полином оператора $A$, действующего в пространстве $S$ над $\mathbb{C}$ циклически, равен $(t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_k)^{m_k}$. Обозначим через $c_\nu$ число инвариантных подпространств размерности $\nu$ (считая $c_0 = 1$). Вычислить полином $F(u) = c_0 + c_1 u + \ldots$

**1062.** В пространстве $S$ над полем $\mathbb{C}$ действует оператор $A$. Доказать, что существует полный флаг $0 = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{n-1} \subset P_n = S$, $\dim P_k = k$, составленный из инвариантных подпространств.

**1063.** Какой вид имеет матрица оператора $A$ в базисе инвариантного флага (т. е. в базисе, первые $k$ векторов которого составляют базис $P_k$, $k = 1, \ldots, n$).

**1064.** Пусть $A$ — оператор, действующий в векторном пространстве $S$ над полем $K$. Инвариантное подпространство называется неприводимым, если оно не содержит инвариантных подпространств, кроме себя и нуля. Доказать, что неприводимое инвариантное подпространство циклично и характеристический полином на нем неприводим над $K$. В частности, при $K = \mathbb{C}$ неприводимы только одномерные подпространства, при $K = \mathbb{R}$ — одномерные и те двумерные, характеристические полиномы которых имеют невещественные корни.

**1065.** Пусть в пространстве $S$ над полем $K$ действуют операторы $A_1, \ldots, A_m$. Подпространство $P$, инвариантное для $A_1, \ldots, A_m$, называется неприводимым, если оно не содержит инвариантных для $A_1, \ldots, A_m$ подпространств, отличных от 0 и $P$. Доказать, что если $A_1, \ldots, A_m$ попарно коммутируют, то минимальные аннуляторы любого вектора $x \in P$ неприводимы над $K$ для всех операторов $A_i$ и не зависят от вектора $x$.

**1066.** Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел рассматривается как двумерное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Написать матрицу оператора умножения на $\alpha = a + bi$ в базисе 1, $i$.

**1067.** Пусть двумерное пространство $S$ над $\mathbb{R}$ неприводимо для оператора $A$, имеющего характеристические числа $a \pm bi$. Доказать, что существует базис, в котором матрица оператора равна $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, т. е. матрице оператора умножения на $a + bi$ в базисе 1, $i$ (см. задачу 1066).

**1068.** Доказать, что для попарно коммутирующих операторов $A_1, \ldots, A_m$ в пространстве $S$ над $\mathbb{C}$ существует общий собственный вектор.

***1069.** Доказать, что для попарно коммутирующих операторов $A_1, \ldots, A_m$ в пространстве $S$ над $\mathbb{R}$ существует общий собственный вектор или инвариантное двумерное подпространство, на котором матрицы операторов имеют вид $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ (некоторые $b_i$ могут равняться нулю).

***1070.** Доказать, что если матрицы $A$ и $B$ коммутируют, то их можно одновременно преобразовать к верхним треугольным матрицам (над $\mathbb{C}$).

**1071.** В пространстве $T$ верхних треугольных матриц действует оператор умножения слева на данную верхнюю треугольную матрицу $A$. Как узнать жорданову каноническую форму этого оператора?

**1072.** Зная собственные значения $A$ и $B$, найти собственные значения их кронекеровского произведения $A \otimes B$ (см. задачу 395).

**1073.** Найти собственные значения $A \otimes E_m + E_n \otimes B$, зная собственные значения для матриц $A$ и $B$ порядков $n$ и $m$.

**1074.** Зная собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ матрицы $A$, найти собственные значения ее антисимметризованной тензорной степени $A^{[m]}$ (см. задачу 519).

*1075. В пространстве $S$ антисимметрических матриц действует оператор $F_A$ по формуле $F_A(X) = A^{\top}X + XA$, где $A$ — данная матрица. Зная собственные значения матрицы $A$, найти собственные значения оператора $F_A$.

## § 5. Элементарная геометрия $n$-мерного евклидова пространства

В примерах этого параграфа рассматривается евклидово пространство строк с естественным скалярным умножением (кроме двух последних задач).

**1076.** Определить скалярное произведение векторов $X$ и $Y$:

a) $X = (2,\ 1,\ -1,\ 2)$, $\quad Y = (3,\ -1,\ -2,\ 1)$;

b) $X = (1,\ 2,\ 1,\ -1)$, $\quad Y = (-2,\ 3,\ -5,\ -1)$.

**1077.** Определить угол между векторами $X$ и $Y$:

a) $X = (2,\ 1,\ 3,\ 2)$, $\quad Y = (1,\ 2,\ -2,\ 1)$;

b) $X = (1,\ 2,\ 2,\ 3)$, $\quad Y = (3,\ 1,\ 5,\ 1)$;

c) $X = (1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $\quad Y = (3,\ 1,\ -1,\ 0)$.

**1078.** Определить косинусы внутренних углов треугольника $ABC$, заданного координатами вершин:

$$A = (1, 2, 1, 2), \quad B = (3, 1, -1, 0), \quad C = (1, 1, 0, 1).$$

**1079.** Определить косинусы углов между прямой $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ и осями координат.

**1080.** Найти длины диагоналей $n$-мерного куба со стороной, равной 1.

**1081.** Найти число диагоналей $n$-мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

**1082.** Найти в $n$-мерном пространстве $n$ точек с неотрицательными координатами так, чтобы расстояния их друг от друга и от начала координат равнялись 1. Первую из этих точек расположить на первой оси координат, вторую — в плоскости, натянутой на первые две оси, и т. д. (Эти точки вместе с началом координат образуют вершины правильного симплекса с длиной ребра, равной 1.)

**1083.** Определить координаты центра и радиус сферы, описанной вокруг симплекса задачи 1082.

**1084.** Нормировать вектор $(3,\ 1,\ 2,\ 1)$.

**1085.** Найти нормированный вектор, ортогональный к векторам $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$; $(1,\ -1,\ -1,\ 1)$; $(2,\ 1,\ 1,\ 3)$.

**1086.** Построить ортормированный базис пространства, приняв за два вектора этого базиса векторы

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right).$$

**1087.** Посредством процесса ортогонализации найти ортогональный базис пространства, порожденного векторами (1, 2, 1, 3); (4, 1, 1, 1); (3, 1, 1, 0).

**1088.** Приписать к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

еще две строчки, ортогональные между собой и ортогональные к первым трем строчкам.

**1089.** Интерпретировать систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

и ее фундаментальную систему решений в пространстве $n$ измерений, считая коэффициенты каждого уравнения координатами вектора.

**1090.** Найти ортогональную и нормированную фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

**1091.** Разложить вектор $X$ на сумму двух векторов, один из которых лежит в пространстве, натянутом на векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а другой ортогонален к этому пространству (ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора $X$):

a) $X = (5, 2, -2, 2)$, $A_1 = (2, 1, 1, -1)$, $A_2 = (1, 1, 3, 0)$;

b) $X = (-3, 5, 9, 3)$, $A_1 = (1, 1, 1, 1)$, $A_2 = (2, -1, 1, 1)$, $A_3 = (2, -7, -1, -1)$.

**1092.** В предположении линейной независимости векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ дать формулы для вычисления длин составляющих вектора в задаче 1091, поставленной в общем виде.

**1093.** Доказать, что из всех векторов данного пространства $P$ наименьший угол с данным вектором $X$ образует ортогональная проекция вектора $X$ на пространство $P$.

**1094.** Найти наименьший угол между векторами пространства $P$, натянутого на векторы $A_1, \ldots, A_m$, и вектором $X$:

a) $$X=(1,\ 3,\ -1,\ 3),\quad A_1=(1,\ -1,\ 1,\ 1),$$
$$A_2=(5,\ 1,\ -3,\ 3);$$

b) $$X=(2,\ 2,\ -1,\ 1),\quad A_1=(1,\ -1,\ 1,\ 1),$$
$$A_2=(-1,\ 2,\ 3,\ 1),\quad A_3=(1,\ 0,\ 5,\ 3).$$

**1095.** Найти наименьший угол, образованный вектором $(1, 1, \ldots, 1)$ с векторами какого-либо $m$-мерного координатного пространства.

**1096.** Доказать, что из всех векторов $X-Y$, где $X$ — данный вектор, а $Y$ пробегает данное пространство $P$, наименьшую длину имеет вектор $X-X'$, где $X'$ есть ортогональная проекция $X$ на $P$. (Эта наименьшая длина называется расстоянием от точки $X$ до пространства $P$.)

**1097.** Определить расстояние от точки $X$ до линейного многообразия $A_0+t_1A_1+\ldots+t_mA_m$:

a) $$X=(1,\ 2,\ -1,\ 1),\quad A_0=(0,\ -1,\ 1,\ 1),$$
$$A_1=(0,\ -3,\ -1,\ 5),\quad A_2=(4,\ -1,\ -3,\ 3);$$

b) $$X=(0,\ 0,\ 0,\ 0),\quad A_0=(1,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$A_1=(1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

**1098.** Дать способ определения кратчайшего расстояния между точками двух линейных многообразий $X_0+P$ и $Y_0+Q$.

**1099.** Вершины $n$-мерного правильного симплекса (см. задачу 1082), длина ребра которого равна 1, разбиты на две совокупности из $m+1$ и $n-m$ вершин. Через эти совокупности вершин проведены линейные многообразия наименьшей размерности. Определить кратчайшее расстояние между точками этих многообразий и определить точки, для которых оно реализуется.

***1100.** В четырехмерном пространстве даны две плоскости, натянутые на векторы $A_1$, $A_2$ и $B_1$, $B_2$. Среди углов, образованных векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, найти наименьший:

a) $A_1=(1, 0, 0, 0)$, $A_2=(0, 1, 0, 0)$,
$B_1=(1, 1, 1, 1)$, $B_2=(2, -2, 5, 2)$;

b) $A_1=(1, 0, 0, 0)$, $A_2=(0, 1, 0, 0)$,
$B_1=(1, 1, 1, 1)$, $B_2=(1, -1, 1, -1)$.

***1101.** Четырехмерный куб пересекается трехмерной «плоскостью», проходящей через центр куба и ортогональной к диагонали. Определить форму тела, получающегося в пересечении.

***1102.** Дана система линейно независимых векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Множество точек, являющихся концами векторов $t_1B_1+t_2B_2+\ldots+t_mB_m$, $0\leqslant t_1\leqslant 1, \ldots, 0\leqslant t_m\leqslant 1$, называется параллелепипедом, построенным на векторах $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Определить объем параллелепипеда индуктивно как объем «основания» $[B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}]$, умноженный на «высоту», равную расстоянию конца вектора $B_m$ до пространства, натянутого на основание. «Объем» одномерного «параллелепипеда» $[B_1]$ считается равным длине вектора $B_1$.

a) Составить формулу для вычисления квадрата объема и убедиться в том, что объем не зависит от нумерации вершин.

b) Доказать, что

$$V[cB_1, B_2, \ldots, B_m]=|c|\cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

c) Доказать, что

$$V[B_1'+B_1'', B_2, \ldots, B_m]\leqslant \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m]+V[B_1'', B_2, \ldots, B_m],$$

и выяснить, когда имеет место знак равенства.

**1103.** Доказать, что объем $n$-мерного параллелепипеда в $n$-мерном пространстве равен абсолютной величине определителя, составленного из координат порождающих векторов.

***1104.** Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_m$ суть ортогональные проекции векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$ на некоторое подпространство. Доказать, что

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m]\leqslant V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

*1105. Доказать, что

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] \leqslant \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$$

(ср. с задачей 506).

1106. Доказать, что

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_m|$$

(ср. с задачей 507).

1107. Найти объем $n$-мерного шара, пользуясь принципом Кавальери.

1108. Рассматривается пространство полиномов, степени которых не превосходят $n$. Скалярное произведение полиномов $f_1, f_2$ определяется как $\int\limits_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$. Найти расстояние от начала координат до линейного многообразия, состоящего из полиномов $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

1109. Рассматривается пространство полиномов, степени которых не превосходят $n$. За скалярное произведение принимается $\int\limits_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$. Найти объем параллелепипеда, образованного векторами того базиса, относительно которого координатами полинома являются его коэффициенты.

## § 6. Операторы в евклидовом и унитарном пространствах

1110. В пространстве тригонометрических полиномов над $\mathbb{R}$

$$\{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$$

введено скалярное умножение

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Показать, что $1/\sqrt{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\ldots$, $\cos nx$, $\sin nx$ образуют ортонормированный базис этого пространства.

1111. В пространстве функций $\{a_0 + b_0 x + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$ найти ортогональную проекцию вектора $x$ на подпространство $\{a_0 + a_1 \cos x +$

$+b_1 \sin x+\ldots+a_n \cos nx+b_n \sin nx\}$; скалярное произведение определяется как раньше.

**1112.** Что представляет собой оператор, сопряженный с оператором дифференцирования $D$, действующим в пространстве задачи 1110.

**1113.** Записать матрицу оператора, сопряженного с оператором, заданным матрицей в некотором базисе, который не предполагается ортонормированным.

**1114.** В пространстве полиномов $\{a_0+a_1 x+\ldots+a_n x^n\}$ введено скалярное произведение по формуле

$$(f, g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Для базиса, составленного из полиномов Эрмита $P_k(x)= =(-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $k=0, 1, \ldots, n$, вычислить матрицу $G=((P_i, P_j))$.

**1115.** Что представляет собой оператор, сопряженный с оператором дифференцирования $D$ в пространстве предыдущей задачи.

**1116.** Записать матрицу оператора $D^*$ в базисе из полиномов Эрмита.

***1117.** Доказать, что если $A$ и $B$ — самосопряженные операторы, действующие в пространстве $S$, то из равенства $(Ax, x)=(Bx, x)$ при всех $x \in S$ следует $A=B$.

**1118.** Для того чтобы оператор $A$ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы $|Ax|=|A^*x|$ при всех $x$. Доказать это.

**1119.** Доказать, что если $C$ — квадратная или прямоугольная комплексная матрица и $\operatorname{Sp} CC^*=0$, то $C=0$.

***1120.** При каком условии матрица $A=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ с квадратными клетками $B$ и $D$ нормальна.

***1121.** Доказать, что ортогональное дополнение к инвариантному подпространству для нормального оператора тоже инвариантно. Инвариантное подпространство вместе с ортогональным дополнением инвариатны и для сопряженного оператора.

**1122.** Доказать, что для нормального оператора в унитарном пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.

**1123.** Сформулировать и доказать теорему в терминах теории матриц, эквивалентную результату предыдущей задачи.

***1124.** Доказать, что собственный вектор нормального оператора в унитарном пространстве есть собственный вектор сопряженного оператора, соответствующий комплексно-сопряженному собственному значению.

**1125.** Доказать ортогональность собственных векторов нормального оператора в унитарном пространстве, принадлежащих различным собственным значениям.

***1126.** Найти вид нормальных вещественных матриц второго порядка, не имеющих вещественных собственных значений.

**1127.** Доказать, что евклидово пространство, в котором определен нормальный оператор $A$, раскладывается в прямую ортогональную сумму инвариантных одномерных и двумерных неприводимых подпространств.

**1128.** Сформулировать и доказать теорему, эквивалентную результату предыдущей задачи, в терминах теории матриц.

***1129.** Доказать, что попарно коммутирующие нормальные матрицы приводятся к диагональной форме одним и тем же унитарным преобразованием подобия.

***1130.** Доказать, что попарно коммутирующие вещественные матрицы одновременно приводятся к канонической форме задачи 1128 преобразованием подобия посредством ортогональной матрицы.

**1131.** Какую каноническую форму имеет унитарный самосопряженный оператор.

**1132.** Какова каноническая форма и геометрический смысл вещественной ортогональной симметрической матрицы.

**1133.** Может ли ортогональная матрица быть антисимметрической.

***1134.** Пусть $P$ и $Q$ — подпространства одинаковой размерности евклидова (или унитарного) пространства. Доказать, что существует ортогональный (унитарный) оператор, переводящий $P$ в $Q$.

**1135.** В евклидовом пространстве $S$ дан полный флаг $0=P_0\subset P_1\subset\ldots\subset P_{n-1}\subset P_n=S$. Доказать существование ортонормированного базиса пространства $S$, включающего базисы подпространств $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Сколько таких базисов можно построить?

**1136.** Та же задача для унитарного пространства.

**1137.** Показать, что для двух данных полных флагов существует ортогональный (унитарный) оператор, переводящий один флаг в другой.

***1138.** Доказать, что для любого оператора в унитарном пространстве найдется ортонормированный базис, в котором матрица оператора — верхняя треугольная, и сформулировать эту теорему в терминах теории матриц.

***1139.** Существует ли унитарная матрица, для каждого столбца которой имеется комплексно-сопряженный столбец.

***1140.** Пусть даны базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ евклидова (или унитарного) пространства. Доказать, что для существования ортогонального (или унитарного) оператора, переводящего $e_i$ в $g_i$, $i=1, \ldots, n$, необходимо и достаточно совпадение матриц Грама $((e_i, e_j))$ и $((g_i, g_j))$.

**1141.** Пусть даны две системы векторов $e_1, \ldots, e_m$ и $g_1, \ldots, g_m$ (не обязательно базисы). Доказать, что теорема предыдущей задачи остается справедливой.

***1142.** Доказать существование ортогональной (унитарной) матрицы, имеющей заданные $k$ первых строк и $m$ первых столбцов, удовлетворяющих необходимым условиям ортогональности и нормированности.

***1143.** Показать, что все ортогональные матрицы вида

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\cdot u^\top \\ \sin\alpha\cdot v & R\end{pmatrix}, \quad u^\top u = vv^\top = 1,$$

при данных столбцах $u$ и $v$ получаются при $R=P-(1+\cos\alpha)\,vu^\top$, где $P$ — ортогональная матрица, переводящая $u$ в $v$.

***1144.** Что представляют собой унитарные симметрические матрицы.

**1145.** Доказать, что унитарная симметрическая матрица представляется в виде $B^\top B$, где $B$ — унитарная матрица.

***1146.** Доказать, что любая унитарная матрица $U$ представляется в виде $P_1\Lambda P_2$, где $P_1$ и $P_2$ — вещественные ортогональные, $\Lambda$ — унитарная диагональная матрица.

**1147.** Доказать, что нормальный идемпотентный оператор самосопряжен. Каков геометрический смысл таких операторов?

**1148.** Для данного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в евклидовом (или унитарном) пространстве доказать существование и единственность базиса $f_1, f_2, \ldots, f_n$ такого, что $(e_i, f_i)=1$, $(e_i, f_j)=0$ при $i\neq j$. (Такой базис называется дуальным с $e_1, \ldots, e_n$, а пара взаимно дуальных базисов называется также биортогональной системой векторов.)

**1149.** Чему равны координаты вектора $x$ в дуальном базисе в терминах исходного базиса.

**1150.** Составить матрицу преобразования координат при переходе от исходного базиса к дуальному.

**1151.** Как связаны объемы параллелепипедов, натянутых на пару дуальных базисов в евклидовом пространстве.

**1152.** Когда базис совпадает со своим дуальным.

Напоминаем, что для линейного отображения $A$ евклидова (или унитарного) пространства $S$ в евклидово (унитарное) пространство $T$ существует сопряженное отображение $A^*: T \to S$, такое что $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для любых векторов $x \in S$, $y \in T$. В ортонормированных базисах матрица отображения $A^*$ транспонирована (транспонирована и комплексно сопряжена) с матрицей отображения $A$.

**1153.** Доказать, что ядро оператора $A: S \to T$ есть ортогональное дополнение к образу $A^*$ (соответственно, образ $A$ есть ортогональное дополнение к ядру $A^*$).

**1154.** Каков геометрический смысл отображения $A: S \to T$, матрица которого (по отношению к ортонормированным базисам) имеет ортогональные и нормированные столбцы.

**1155.** Каков геометрический смысл отображения $A: S \to T$, матрица которого (по отношению к ортонормированным базисам) имеет ортогональные и нормированные строки.

***1156.** Дано отображение $A$ евклидова пространства $S$ в евклидово пространство $T$. В $S$ задана единичная сфера $(x, x) = 1$. Что представляет собой ее образ в $T$?

***1157.** Пусть оператор $A: S \to T$ отображает евклидово пространство $S$ в евклидово пространство $T$. Доказать существование и единственность оператора $A^+$, обладающего свойствами: $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+$ и $A^+A$ самосопряжены. (Такой оператор называется обобщенным обратным.)