СТАТИЧНА МОДЕЛЬ “ВИТРАТИ – ВИПУСК” ЛЕОНТЬЄВА

Міжгалузевий баланс

Статична модель “витрати-випуск” або модель міжгалузевого балансу (МГБ) є основою багатьох лінійних моделей виробничого сектора економіки. Вона базується на понятті „чиста галузь” (галузь):

1) галузь випускає лише один продукт;
2) кожен продукт випускається лише однією галуззю;
3) кожна галузь має єдину технологію;
4) не допускається заміщення ресурсів.

Припустимо, що весь виробничий сектор народного господарства (н/г) розбито на n чистих галузей. В процесі виробництва кожна з галузей потребує, взагалі кажучи, продукцію вироблену, іншими галузями. Отже, виробляється $\boldsymbol{n}$ продуктів. І нехай в масштабі н/г маємо балансовий звіт за підсумками певного періоду (табл.1).

Таблиця 1

Випуск **Витрати**		**Розподіл випуску між галузями** 1 2 … j … n	**Кінцева продукція (споживання)**	**Валовий випуск**
Розподіл продукції *i*-ої галузі на потреби інших галузей	**1**	$x_{11}\ x_{12} \ldots x_{1j} \ldots x_{1n}$	y_1	x_1
	2	$x_{21}\ x_{22} \ldots x_{2j} \ldots x_{2n}$	y_2	x_2
	…	…………………….	…	…
	i	$x_{i1}\ x_{i2} \ldots x_{ij} \ldots x_{in}$	y_i	x_i
	…	…………………….	…	…
	n	$x_{n1}\ x_{n2} \ldots x_{nj} \ldots x_{nn}$	y_n	x_n
Додана вартість		$v_1\ \ v_2 \ldots v_j \ldots v_n$		
Валовий продукт (випуск)		$x_1\ \ x_2 \ldots x_j \ldots x_n$		

Тут $\boldsymbol{x_{ij}}$ – обсяг продукту i-ої галузі, що витрачено j-ою галуззю у виробничому процесі; $\boldsymbol{x_i}$ – загальний обсяг продукції i-ої галузі; $\boldsymbol{y_i}$ – обсяг i-ої продукції, що витрачається у невиробничій сфері (кінцеве споживання); $\boldsymbol{v_j}$ – додана вартість j-ої продукції (амортизаційні відрахування, оподаткування, зарплата по найму тощо).

Оскільки таблиця має балансовий характер, то по кожній галузі можна записати:

$$\boldsymbol{x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}) + y_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n.} \tag{1}$$

Зауважимо, що баланс (1) можна отримувати як в натуральному, так і у вартісному виразі.

Аналогічно, баланс продукції за стовпчиком: об’єм випущеної продукції дорівнює сумарним затратам:

$$\boldsymbol{x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j\,, \qquad j = 1, \ldots, n.} \tag{2}$$

Умовою взаємно-однозначної відповідності МГБ-ів, які використовують різні показники (вимірники), є незмінне співвідношення масштабів цих показників за кожним видом продукції. Наприклад, якщо в одному МГБ (в натуральному виразі) електроенергія вимірюється в кіловатгодинах, а в іншому (у вартісному виразі) – в гривнях, то кожній гривні електроенергії завжди повинна відповідати одна й та ж кількість кіловат-годин, як би ця енергія не використовувалася. Отже, показники МГ матеріального балансу у вартісному виразі, які задовольняють вказаній умові, позначимо:

$$\tilde{x}_j\,, \quad \tilde{y}_j\,, \quad \tilde{x}_{ij}\,, \quad \tilde{v}_j\,.$$

Для МГБ в натуральному виразі замінимо попередні позначення. Тоді замість (1) та (2) відповідно маємо:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} + \tilde{y}_j, \tag{3}$$

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij} + \tilde{v}_j. \tag{4}$$

Якщо p_i – єдина (узгоджена) ціна i-го виду продукції ($i = 1, \ldots, n$), то

$$\tilde{x}_i = p_i x_i; \qquad \tilde{y}_j = p_i y_i; \qquad \tilde{x}_{ij} = p_i x_{ij}. \tag{5}$$

Модель Леонтьєва

Для побудови математичної моделі вирішальне значення має припущення про те, що x_{ij} є функцією від обсягу виробництва цієї продукції. У найпростішій моделі використовується припущення про пропорційну залежність між затратами та обсягом виробництва, тобто вводяться лінійно-однорідні функції виробничих затрат:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j. \tag{6}$$

Коефіцієнт пропорційності $a_{ij} \geq 0$ називається *коефіцієнтом прямих виробничих витрат (технологічним коефіцієнтом) продукції i на виробництво одиниці продукції j.*

Підставляючи вираз (6) в (1) маємо:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Позначаємо:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}, \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}},$$

$A = \{a_{ij}\}_n$ – квадратна матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат (технологічна матриця). Тоді у векторно-матричній формі маємо:

$$x = Ax + y \quad – \tag{7}$$

модель Леонтьєва.

Вище було показано, що при використанні єдиної ціни на кожний вид продукції та однакових методах обміну досягається взаємно-однозначна відповідність між показниками МГБ-ів у натуральному та вартісному виразі. Приймаючи до уваги (6) маємо:

$$\tilde{x}_{ij} = \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j, \qquad \tilde{a}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\tilde{x}_j} = \frac{p_i x_{ij}}{p_j x_j} = \frac{p_i a_{ij} x_j}{p_j x_j} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j} \tag{8}$$

або

$$\tilde{x} = Px; \qquad \tilde{y} = Py; \qquad \tilde{A} = PAP^{-1},$$

де $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p_i}\}$ – діагональна матриця цін, $\boldsymbol{P}^{-1}$ – діагональна матриця величин, які обернені цінам. Тобто, матриці A і $\widetilde{A}$ – подібні (отже, мають однакові власні числа).

Модель міжгалузевої залежності цін

Покладемо, що $\tilde{v}_j$ – додана вартість в j-ій продукції, пропорційна обсягу продукції:

$$\tilde{v}_j = r_j \tilde{x}_j ,$$

де r_j – коефіцієнт умовно-чистої продукції в загальному обсязі продукції. Тоді маємо:

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j + r_j \tilde{x}_j .$$

Природно припустити, що $\tilde{x}_j \neq 0$, тоді

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} + r_j. \tag{9}$$

Помножимо (9) справа на p_j ($p_j \neq 0$):

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} p_j + r_j \cdot p_j.$$

Враховуючи співвідношення (8), маємо:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} p_j^{-1} p_j + r_j p_j.$$

Тобто:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + r_j p_j.$$

Позначимо $s_j = r_j p_j$ – додана вартість в ціні j-ої продукції, і введемо до розгляду вектори $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ **та** $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Тоді маємо **модель врівноважених цін** (модель МГ залежності цін).

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{s}. \tag{10}$$

Модель (10) є, по суті двоїстою до моделі Леонтьєва (7).

Аналіз продуктивності моделі „затрати – випуск”.

Спочатку введемо поняття продуктивності.

Означення 1. Якщо для будь-якого невід’ємного вектора кінцевого споживання $y \geq 0$ система (7) сумісна (тобто, має розв’язок), то відповідну модель Леонтьєва (або технологічну матрицю A) називають **продуктивною**.

Означення 2. Матриця A називається **продуктивною**, якщо існує вектор $x \geq 0$, який дозволяє отримати невід’ємний вектор кінцевої продукції:

$$(E - A)x = y \geq 0.$$

“Продуктивність” можна назвати синонімом “незбитковість”, “рентабельність”.

Для подальших викладок важливим є поняття нерозкладності матриці.

Означення 3. В теорії матриць **розкладними** називаються такі матриці A, які одночасною перестановкою рядків та стовпчиків приводяться до вигляду:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & * \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(11)}$$

де A_{11}, A_{22} – квадратні блоки, що містять ненульові елементи; 0 – блок, який містить лише нулі, * – блок, елементи якого можуть приймати будь-яке значення.

Означення 4. Матриця A **нерозкладна**, якщо для неї не існує таких одночасних перестановок рядків та стовпчиків, які привели б її до вигляду (11).

Економічно нерозкладність означає те, що кожна галузь прямо чи опосередковано використовує продукцію всіх інших галузей, а її продукція прямо чи опосередковано використовується у виробництві продукції всіх інших галузей, тобто всі пари галузей знаходяться в двосторонньому зв'язку.

Теорема 1 (Фробеніуса-Перрона) (про спектральні властивості невід'ємної нерозкладної матриці). Нехай матриця A розмірності $n \times n$ невід'ємна і нерозкладна, а $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ – множина її власних чисел ($m \le n$). Тоді в множині $\sigma(A)$ є додатне число λ_A, яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці A, і таке, що

$$|\lambda_k| \le \lambda_A, \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

Крім цього, власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до скалярного множника) власний вектор x_A такий, що $(x_A)_i \ne 0$, $\mathrm{sign}(x_A)_i = \mathrm{sign}(x_A)_j$, $\forall\, i, j = 1, \dots, n$, тобто вектор x_A можна вибрати додатнім:

$$x_A > 0.$$

Зазначимо, що число λ_A називається **числом Фробеніуса** матриці A, а x_A – вектором Фробеніуса матриці A:

$$Ax_A = \lambda_A x_A.$$

Сформулюємо для початку достатні ознаки продуктивності моделі „затрати-випуск".

Теорема 2 (достатня ознака продуктивності). Нехай: 1) матриця A невід'ємна і нерозкладна; 2) сума q_i елементів кожного її рядка не перевищує 1:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1, \qquad i = 1, ..., n;$$

3) хоча б одного рядка i_0: $q_{i_0} < 1$. Тоді модель Леонтьєва, яка відповідає цій матриці, є продуктивною.

Теорема 3 (критерій продуктивності моделі „затрати-випуск"). Для продуктивності моделі Леонтьєва (7) необхідно і достатньо, щоб фробеніусове число λ_A матриці A задовольняло нерівність $\lambda_A < 1$.

Лінійна модель обміну
(Модель міжнародної торгівлі)

Припустимо: **n** країн торгують між собою. Вважаємо, що прибуток будь-якої країни складається з продаж на внутрішньому та зовнішньому ринках. Структура торгівельних відносин є такою:

d_j – прибуток j-ї країни;

q_{ij} – частка прибутку d_j j-тої країни, яка витрачається на імпортування товарів з i-тої країни є сталою і не залежить від прибутку d_j;

$Q = (q_{ij})_1^n$ – квадратна матриця структури торгівлі – матриця обміну. Для неї, очевидно, $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1$;

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ – вектор прибутків.

Якщо країни торгують відповідно до матриці обміну, то після одного обороту торгівлі країни матимуть прибуток, який описується вектором:

$$Qd = \left(\sum_{j=1}^{n} q_{1j} d_j ,\ \sum_{j=1}^{n} q_{2j} d_j ,\ \ldots , \sum_{j=1}^{n} q_{nj} d_j \right).$$

Очевидно, що торгівля має сенс, коли:

$$d \le Qd\ .$$

Повні та опосередковані матеріальні витрати
Коефіцієнти трудових витрат

Нагадаємо, що матриця A моделі Леонтьєва є прямих виробничих (матеріальних) витрат. Введемо до розгляду матриці:

$A^{(1)} = A^2$ – матриця опосередкованих матеріальних витрат І-го порядку;

$A^{(2)} = A^3$ – матриця опосередкованих матеріальних витрат ІІ-го порядку;

…………………………………………………………………………………….

$A^{(m-1)} = A^m$ – матриця опосередкованих матеріальних витрат m-го порядку.

Розглянемо матричний ряд:

$$E + A + A^2 + \ldots + A^m + \ldots \qquad (12)$$

У випадку, коли матриця A продуктивна, ряд (12) є збіжним, причому

$$E + A + A^2 + \ldots + A^m + \ldots = (E - A)^{-1} = B.$$

Матриця $(E - A)^{-1} = B$ називається матрицею ***повних матеріальних витрат***. Очевидно, що дана матриця є невід'ємною: $B \ge 0$, а коли матриця A нерозкладна, то $B > 0$.

Модель Леонтьєва дає можливості дослідити і деякі проблеми стосовно використання і раціонального розподілу трудових ресурсів, що, в свою чергу, значною мірою визначає ефективність економіки.

Введемо до розгляду вектор витрат трудових ресурсів $l = (l_1, \ldots, l_n)$, де число $l_j > 0$ (коефіцієнт трудових витрат) показує витрати трудових ресурсів в j–ій галузі при функціонуванні її технологічного процесу з одиничною інтенсивністю. Технологія такої модифікованої моделі Леонтьєва може бути характеризована парою (l, A).

Якщо загальний обсяг трудових ресурсів позначити через L, $L > 0$, то природно додати до моделі Леонтьєва обмеження на обсяг затрат трудових ресурсів вигляду:

$$(l, x) \le L,$$

де x – вектор інтенсивностей (або валового випуску). Тепер модифікована модель записується так:

$$x - Ax = y, \qquad (l, x) \le L, \qquad x \ge 0. \qquad (13)$$

Якщо x – розв'язок задачі (13), то $x = (E - A)^{-1} y$, а для вектора трудових затрат маємо:

$$(l, x) = l(E - A)^{-1} y.$$

Отже, вектор $l^* = l(E - A)^{-1}$ називається вектором повних трудових затрат: його j–та компонента виражає повні трудові витрати j–ої галузі економіки.

Задачі

Задача 1.

Економіка країни розбита на дві виробничі галузі (промисловість та сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі був розподілений таким чином:

800 млн.грн. для виробничих потреб промисловості;

400 млн.грн. для виробничих потреб сільського господарства;

800 млн.грн. для споживання населення (згідно попиту на цю продукцію).

В той же час повний випуск сільськогосподарської продукції (у вартісній формі) був розподілений таким чином:

300 млн.грн. для виробничих потреб промисловості;

350 млн.грн. для виробничих потреб сільського господарства;

600 млн.грн. для споживання населення (згідно попиту на цю продукцію).

На наступний рік прогнозується зростання попиту населення на вітчизняну продукцію, в т. ч. на промислові вироби до 1000 млн. грн. та на сільськогосподарську продукцію до 800 млн. грн. Який повний випуск промислової продукції та повний випуск сільськогосподарської продукції зможуть задовольнити новий попит?

Розв'язок:

Будуємо звітний баланс

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_{11} + \boldsymbol{x}_{12} + \boldsymbol{y}_1$ – промисловість,

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_{21} + \boldsymbol{x}_{22} + \boldsymbol{y}_2$ – сільське господарство.

$\boldsymbol{x}_{11} = 800$; $\quad \boldsymbol{x}_{12} = 400$; $\quad \boldsymbol{y}_1 = 800$;

$\boldsymbol{x}_{21} = 300$; $\quad \boldsymbol{x}_{22} = 350$; $\quad \boldsymbol{y}_2 = 600$;

Отже, $\boldsymbol{x}_1 = 2000$, $\quad \boldsymbol{x}_2 = 1250$.

Знаходимо коефіцієнти матеріальних витрат:

$$\boldsymbol{x_{ij} = a_{ij}x_j}$$

$$\boldsymbol{a}_{11} = \frac{\boldsymbol{x_{11}}}{\boldsymbol{x_1}} = \frac{\mathbf{800}}{\mathbf{2000}} = 0{,}4; \qquad \boldsymbol{a}_{12} = \frac{\boldsymbol{x_{12}}}{\boldsymbol{x_2}} = \frac{\mathbf{400}}{\mathbf{1250}} = 0{,}32;$$

$$\boldsymbol{a}_{21} = \frac{\boldsymbol{x_{21}}}{\boldsymbol{x_1}} = \frac{\mathbf{300}}{\mathbf{2000}} = 0{,}15; \qquad \boldsymbol{a}_{22} = \frac{\boldsymbol{x_{22}}}{\boldsymbol{x_2}} = \frac{\mathbf{350}}{\mathbf{1250}} = 0{,}28.$$

Отже, технологічна матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}4} & \mathbf{0{,}32} \\ \mathbf{0{,}15} & \mathbf{0{,}28} \end{pmatrix}.$$

Будуємо модель Леонтьєва:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}32x_2 + y_1,} \\ \boldsymbol{x_2 = 0{,}15x_1 + 0{,}28x_2 + y_2.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{0{,}6x_1 - 0{,}32x_2 = y_1,} \\ \boldsymbol{-0{,}15x_1 + 0{,}72x_2 = y_2.} \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок моделі при $y_1 = 1000$, $\quad y_2 = 800$, тобто, розв'язуємо таку систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{0{,}6x_1 - 0{,}32x_2 = 1000,} \\ \boldsymbol{-0{,}15x_1 + 0{,}72x_2 = 800,} \end{cases}$$

звідки маємо:

$x_1 \approx 2541{,}7$ (млн. грн.);

$x_2 \approx 1640{,}6$ (млн. грн.).

Задачі для самостійної роботи:

Задача 2.

Використовуючи дані Задачі 1, знайти ціни на продукцію промисловості та сільського господарства, якщо відомо, що коефіцієнти умовно-чистої продукції складають:

0,4 – для промисловості;

0,5 – для сільського господарства.

Задача 3.

Знайти число Фробеніуса, правий та лівий вектори Фробеніуса матриці A. Вирішити питання про продуктивність даної матриці: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Задача 4.

Знайти власні числа матриці A, її число Фробеніуса, правий та лівий вектори Фробеніуса. Вирішити питання про продуктивність даної матриці: $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Задача 5.

Чи є розкладними такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{33} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}?$$

Задача 6.

Нехай матриця A нерозкладна. Що можна сказати про нерозкладність матриць A^{T}, A^{-1}, A^{2}?

Задача 7.

Нехай в моделі обміну множину всіх країн розбито на m груп ($S_0, S_1, \ldots, S_m$), які між собою не перетинаються. Припустимо, що країни з групи S_r купують товари із сусідньої групи S_{r+1}, $r = 1, 2, \ldots, m - 2$, а країни з групи S_{m-1} ввозять товари тільки з країни групи S_0. Нехай початковий вектор розподілу прибутку має вигляд $d^0 = (d_1, 0, \ldots, 0)^T$. Показати, що в результаті обміну прибуток d_1 переходитиме від однієї групи до іншої, і зрештою повернеться до S_0.

Задача 8.

Для статичної моделі Леонтьєва матриця витрат $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю повних затрат. Знайти число Фробеніуса для B, A. При $\boldsymbol{l} = (1,\ 2)$ знайти вектор повних трудових витрат.