Динамічна рівновага

До цих пір мова йшла про стан рівноваги та його зміни безвідносно щодо часу, а також процесу взаємного пристосування попиту і пропозиції. В дійсності економічні агенти володіють обмеженою інформацією і діють у відповідності з особливостями технології виробництва тих чи інших благ. Отже, необхідним є час для того, щоб відреагувати на зміну попиту.

Ми будемо виходити з того, що саме попит як ринковий вираз потреби є керуючим механізмом в розподілі ресурсів, т. т. використовується припущення про відсутність економічного розвитку.

Будемо виходити також з того, що невизначеність обумовлює орієнтацію продавців на ціну, що склалася в попередній період, а товари, які вироблені в попередньому періоді, не можуть бути реалізовані в наступному.

Дискретна (динамічна) павутиноподібна модель

Дискретна (динамічна) модель будується на основі припущення про запізнення пропозиції по відношенню до змін в попиті. Спочатку опишемо модель у вербальній формі.

Якщо відбулось несподіване для продавців підвищення попиту, наприклад, в результаті зростання ціни на товари-замінники, то величина пропозиції в заданий ринковий період залишиться незмінною, оскільки припускається рівність нулеві (незмінність) запасів. Тоді коректування буде здійснюватися лише за рахунок ринкової ціни.

В наступному (першому після зміни попиту) ринковому періоді продавці, плануючи свою величину пропозиції, будуть орієнтуватися вже на ціну, яка склалася в попередньому періоді. Проте при заданій ціні їм не вдасться реалізувати всю вироблену кількість блага. Оскільки діє припущення про врівноваження величини попиту і пропозиції в кожному ринковому періоді, то ринкова ціна має знизитися до рівня ціни попиту, що відповідає виробленій кількості.

Продавці, що орієнтуються на цю останню ціну, в другому після зміни попиту періоді зменшують заплановану величину пропозиції, а це знову викличе зростання цін в наступному періоді. Так буде продовжуватися до тих пір, поки ціна і обсяг ринкових угод не наблизяться до деякого рівня, для якого приватні плани продавців і покупців за обома параметрами можуть бути погодженими.

В аналітичній формі павутиноподібна модель може бути представлена так. У випадку, коли функція попиту і пропозиції задані у вигляді:

$$Q_d = a - bP; \qquad\qquad Q_s = c + dP,$$

розглянемо умову рівноваги на ринку:

$$Q' = a - bP' = c + dP', \tag{1}$$

яке перетворюється в співвідношення з урахуванням запізнення по часу пропозиції відносно попиту:

$$Q(t) = a - bP(t) = c + dP(t-1). \tag{2}$$

Припустимо, відхилення від рівноважної ціни і рівноважного обсягу ринкових угод у фізичному вираженні виражається, відповідно, такими рівняннями:

$$p(t) = P(t) - P', \tag{3}$$

$$q(t) = Q\,(t) - Q'. \tag{4}$$

Використовуючи ці позначення, отримаємо:

$$q(t) = -\,bp(t) = dp(t-1). \tag{5}$$

Тоді для періоду $t = 1$ відхилення фактичної ціни від рівноважної, що виражається через ціну, яка склалася в попередній $t = 0$ дорівнює:

$$\boldsymbol{p(1) = -\frac{d}{b}p(0)}. \qquad (6)$$

Використовуючи формулу відхилення фактичної ціни від рівноважної в період $t = 1$, можна визначити аналогічне відхилення для періоду $t = 2$:

$$\boldsymbol{p(2) = -\frac{d}{b}p(1) = \left(-\frac{d}{b}\right)^2 p(0)}. \qquad (7)$$

Використовуючи метод різницевих рівнянь можна отримати формулу відхилення фактичної ціни від рівноважної в період $\boldsymbol{t}$, що виражається через вихідне відхилення фактичної ціни від потенційно рівноважної:

$$\boldsymbol{p(t) = \left(-\frac{d}{b}\right)^t p(0)} \qquad (8)$$

або

$$\boldsymbol{P(t) = P' + (P(0) - P')\left(-\frac{d}{b}\right)^t}. \qquad (9)$$

Слід звернути увагу на те, що відхилення від рівноважної ціни приймає послідовно додатне або від'ємне значення в залежності від періоду, який розглядається. Отже, фактична рівноважна ціна може опускатися нижче потенційно рівноважної та підніматися вище за неї.

На відміну від ціни відхилення фактичного обсягу ринкових угод у фізичному вираженні від потенційно рівноважного буде завжди від'ємним, що вказує на наявність невикористаних можливостей торгівлі для обох сторін. Лише при переході до границі відхилення може бути рівним нулеві. Проте для цього мають бути виконані деякі умови. Мова йде про *стабільність рівноваги.*

Дослідимо формулу (8), коли будемо мати різні відношення параметрів $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{d}$.

1. $\boldsymbol{0 < \frac{d}{b} < 1}$. В цьому випадку, маємо, що після зміни ціни при $\boldsymbol{t \to \infty}$, ціна $\boldsymbol{P(t) \to P'}$ (до рівноважної ціни).

Рівновага ринку вважається *стабільною* тоді, коли в стані рівноваги еластичність попиту за ціною вища еластичності пропозиції за ціною. А це еквівалентне такому співвідношенню: $\boldsymbol{b > d}$ ($\boldsymbol{|E_d| > |E_s|}$). Тобто, в такому випадку ми і маємо збіжність ряду відхилень фактичної ринкової ціни від рівноважної і фактичного обсягу ринкових угод від рівноважного.

Графічно ці види рівноваги можна представити таким чином (рис. 1):

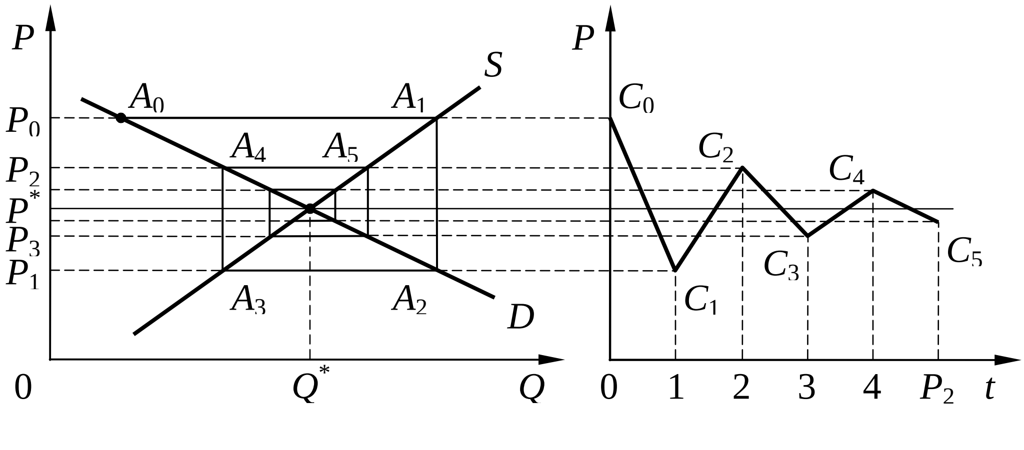


Рис. 1

2. $\dfrac{d}{b} > 1$. В цьому випадку :

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{d}{b}\right)^t = \infty; \quad \lim_{t\to\infty}(P(t) - P') = \pm\infty \ .$$

Рівновага ринку називається *нестабільною*, якщо в результаті впливу деякого фактору амплітуда коливань ціни навколо рівноважної збільшується, що, відповідно, збільшує відхилення фактичного обсягу ринкових угод від рівноважного. А це можливе тоді, коли еластичність попиту за ціною в умовах рівноваги є нижчою еластичності пропозиції за ціною, тобто $\boldsymbol{b < d}$ **(**$|\boldsymbol{E_d}| < |\boldsymbol{E_s}|$**).**

В решті решт коливання цін можуть стати настільки великими, що це призведе до "закриття " ринку (нульовому обсягу угод у фізичному вираженні). Графічно нестабільна рівновага представлена на рис. 2.

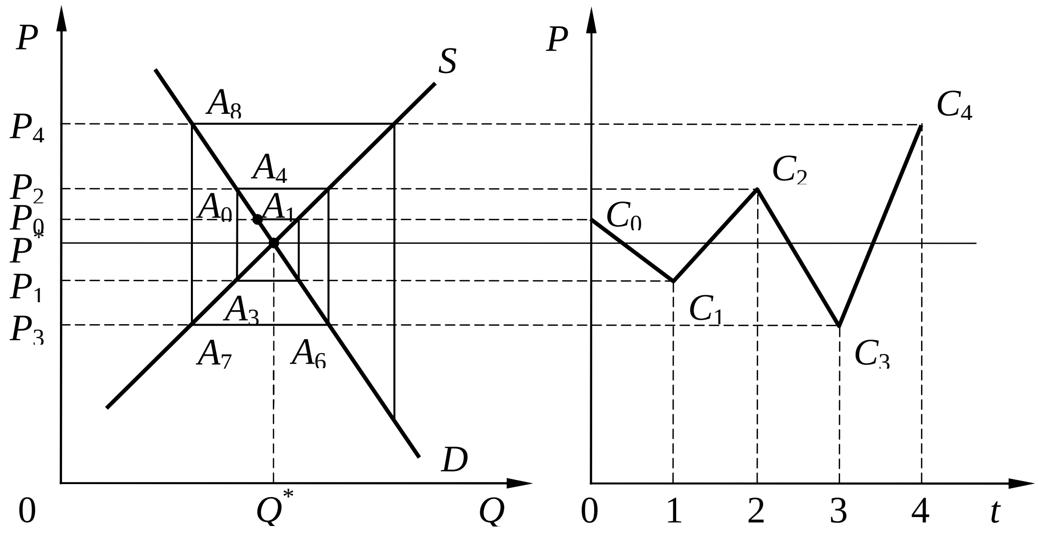


Рис. 2

3. $\dfrac{d}{b} = 1$. *Рівновага* може бути називаною *квазістабільною*, якщо в результаті впливу деякого фактору на попит, відхилення фактичної ціни від рівноважної виявляється постійним, оскільки еластичність попиту і пропозиції за ціною в умовах рівноваги є однаковими, що відповідає співвідношенню $b = d$. Графічно квазістабільність рівноваги представлена на рис. 3.

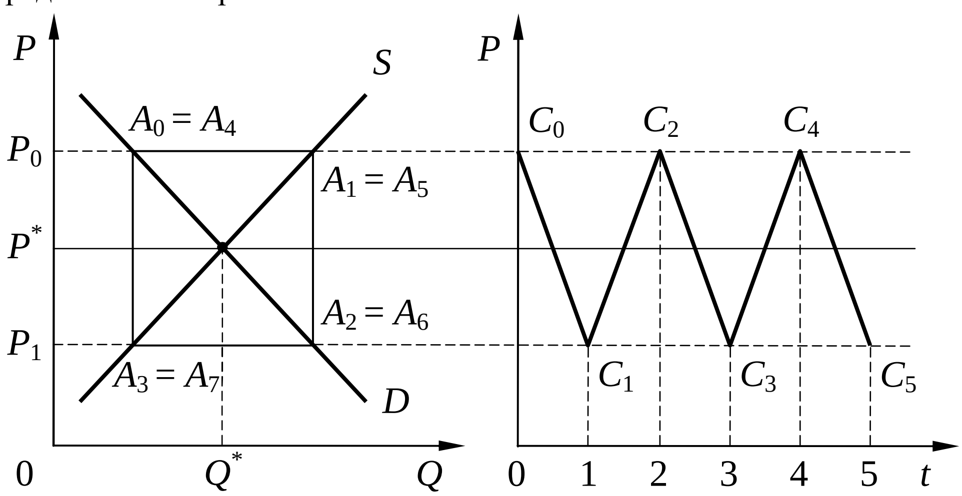


Рис. 3

Задачі для самостійної роботи:

Задача 1. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають, відповідно, наступний вигляд: $Q_d = \frac{10}{p}$ та $Q_s = p + 2$. Дослідити динамічну рівновагу та побудувати повутиноподібну модель.

Державне регулювання ринку

Вплив держави може відбуватися через:

1) оподаткування,
2) контроль за цінами,
3) квотування,
4) надання дотацій та субсидій.

(1) Розглянемо, як впливає на взаємодію попиту та пропозицій введення опосередкованого податку, який вводиться на кожну одиницю реалізованої продавцями продукції і обчислюється за простою формулою:

$$T = t \cdot Q.$$

де T – загальна величина опосередкованого податку,

t – ставка опосередкованого податку (певна сума грошових одиниць за одиницю товару),

Q – кількість реалізованого товару.

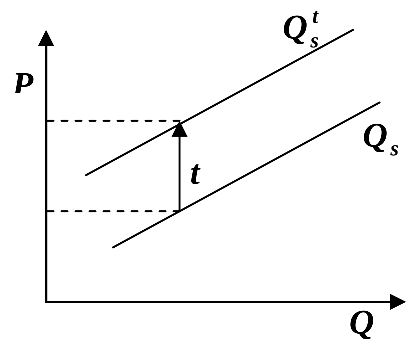
Зміни в рівновазі після введення опосередкованого податку

Після введення податку, продавець повинен збільшити ціну товару для кожного обсягу пропозиції на величину ставки податку.

Нехай: $Q_s = c + dp$,

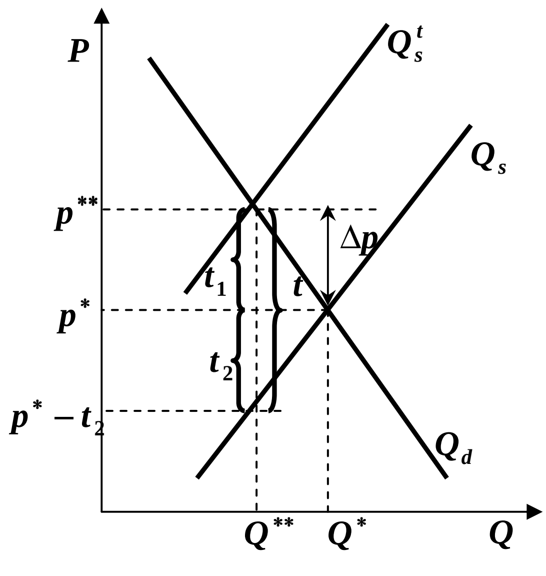
Тоді: $p = \frac{Q_s - c}{d}$.

Коли держава вводить ставку податку t, то лінія пропозиції зсунеться на t одиниць вгору:



$$p^t = \frac{Q_s - c}{d} + t,$$

або $Q_s^t = c + d(p - t)$, тобто пропозиція з введенням податку зменшилась, за одну і ту ж ціну пропонують меншу кількість товару. Визначимо рівноважну ціну після введення опосередкованого податку з умови рівноваги:



$$a - bp = Q_d = Q_s^t = c + d(p - t)$$

$$\Rightarrow p^{**} = \frac{a - c}{b + d} + \frac{t}{1 + b/d}.$$

Зауваження. Коли податок був відсутній, то рівноважна ціна була $p^* = \frac{a - c}{b + d}$.

Тобто,

$$p^{**} = p^{*} + \frac{t}{1+{}^{b}\!/_{d}}.$$

Отже, зміна в рівноважній ціні дорівнює

$$\Delta p = p^{**} - p^{*} = \frac{t}{1+{}^{b}\!/_{d}}.$$

Очевидно, що ринкова ціна після введення податку зросла на Δp одиниць. Це означає, що споживач повинен сплачувати за одиницю товару на Δp більше, рівноважний обсяг при цьому зменшився. Виробник буде отримувати від споживача за кожну реалізовану одиницю товару p^{**}, з них сплатить державі t одиниць у вигляді податку. Отже, формально податок у розмірі t одиниць сплачує продавець, але ж насправді, його сплачує як продавець, так і покупець (споживач).

Розподіл податкового тиску між споживачем та продавцем

Розіб'ємо відрізок t на t_1 та t_2:

$$t_1 = \Delta p = \frac{t}{1+{}^{b}\!/_{d}}, \quad t_2 = t - \Delta p = t - t_1.$$

Продавець залишає собі $p^{*} - t_2$ грошових одиниць після сплати податку, а до введення мав p^{*}. Таким чином t_2 – *втрати продавця*, $t_1 = \Delta p$ – *втрати споживача*.

Отже податок t складається з втрат споживача $t_1 = \Delta p$ і втрат виробника-продавця.

$t_1 = \dfrac{t}{1+{}^{b}\!/_{d}}$ – частка податку, яку сплачує споживач,

$t_2 = t - t_1 = \dfrac{t}{1+{}^{d}\!/_{b}}$ – частка податку, яку сплачує продавець.

Розглянемо випадки:

1) $\left|\dfrac{b}{d}\right| = \left|\dfrac{E_d}{E_s}\right| \approx 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 \approx t, \\ t_2 \approx 0. \end{cases}$ – мала еластичність попиту. При малих $\left|\dfrac{b}{d}\right|$ основна частка податкового тягаря припадає на споживача.

2) $\left|\dfrac{b}{d}\right| = \left|\dfrac{E_d}{E_s}\right| \approx \infty \Rightarrow \begin{cases} t_1 \approx 0, \\ t_2 \approx t. \end{cases}$ – при великих значеннях $\left|\dfrac{b}{d}\right|$ основна частина податкового тягаря припадає на продавців.

3) $b = 0 \Rightarrow E_d = 0$.

$$\begin{cases} t_1 = t, \\ t_2 = 0. \end{cases}$$

Для абсолютно нееластичного попиту на товар весь податковий тягар лягає на споживача.

$E_d = \infty$

$$\begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = t. \end{cases}$$

для абсолютно еластичного попиту на товар весь податковий тягар лягає на продавця (виробника).

Введення опосередкованого податку призводить до:

1) підвищення ринкової ціни в залежності від співвідношення еластичности попиту та пропозиції по ціні,
2) зменшення обсягу ринкових угод,
3) утворення прибутку держави у розмірі $T = t \cdot Q^*$.

Інші методи регулювання

Держава може встановлювати *фіксовані ціни*, вводити *дотації* (виплата певної суми коштів h за виробництво одиниці продукції). В останньому випадку $Q_s^t = c + d(p+h)$ – випадок заохочення виробника. Держава може вводити *квоти* – обмеження на обсяг реалізації(або імпорту) товару.

Держава може надавати *субсидію*. Наприклад, субсидія в s грошових одиниць надається споживачеві на кожну одиницю товару, яку він придбав. Тоді функція попиту матиме вигляд $Q_d^t = a - b(p - s)$

Використання квоти

Одним із широко використовуваних засобів у сфері міжнародної (зовнішньої) торгівлі є *квотування.*

Квота – обмеження (ліміт) на обсяг товару, що ввозиться в країну із-за кордону, і може бути проданий на внутрішньому ринку країни.

Нехай функція попиту населення країни на імпортну продукцію є $Q_d = a - bp$, функція пропозиції іноземних виробників $Q_s = c + dp$. Припустимо, що уряд з метою захисту власного виробника встановив щорічний ліміт на імпортовану в розмірі $Q_{\lim} < Q^*$, де Q^* – рівноважний обсяг статичної рівноваги.

Порівняємо рівноважні параметри ринку **до** і **після** введення квоти:

До

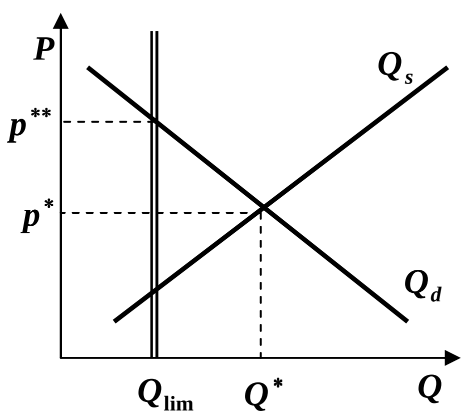
$$p^* = \frac{a-c}{b+d},$$

$$Q^* = \frac{ad+bc}{b+d}.$$

Після

$$p^{**} = \frac{Q_{\lim} - a}{-b},$$

$$Q^{**} = Q_{\lim}.$$



Отже, лінія пропозиції з врахуванням введеної квоти буде мати вигляд: $p^{**} > p^* \Rightarrow$ рівноважна ціна після введення квоти може бути виражена з умови $Q_{\lim} = a - bp.$ Видно, що ринкова ціна при квотуванні стала вищою.

Зауваження. Таких же значень p^{**} та Q^{**} можна досягти, якщо замість квоти ввести податок:

$$\frac{p^{**} - Q_{\lim} - c}{d}.$$

Задачі

Задача1.

Пропозиція парасольок в місті N абсолютно еластична, а еластичність попиту дорівнює $-0{,}4$. Мер міста вводить податок на виробництво парасольок у розмірі 50 грошових одиниць на парасольку. Хто виграє і хто програє в результаті цього нововведення мера?

Розв'язок:

Очевидно, що ринкова ціна підніметься на ставку податку. Програють покупці, бо платитимуть більшу ціну і куплятимуть менше парасольок (весь податковий тягар лягає на них). Виграє лише бюджет міста N, для продавців нічого не зміниться.

Задача 2.

На конкурентному ринку бензину в США можна щорічно продати 100 млрд. галонів бензину за ціною $1\$$/галон. Коли світова ціна бензину впала до $0{,}5\$$/галон, квота на імпорт бензину склала 20 млрд. галонів на рік. Яким буде щорічний дефіцит бензину в США, якщо еластичність попиту та пропозиції дорівнюють, відповідно, $-0{,}5$ та $0{,}4$?

Розв'язок:

Нехай $p_1 = 1\$$, $p_2 = 0{,}5\$$.

$$E_s = \frac{Q_s^2 - Q_s^1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_1 + p_2}{Q_s^2 + Q_s^1} = \frac{Q_s^2 - 100}{-0{,}5} \cdot \frac{1{,}5}{Q_s^2 + 100} = 0{,}4 \Rightarrow Q_s^2 = 76{,}47,$$

$$E_d = \frac{Q_d^2 - Q_d^1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_1 + p_2}{Q_d^2 + Q_d^1} = \frac{Q_d^2 - 100}{-0{,}5} \cdot \frac{1{,}5}{Q_d^2 + 100} = -0{,}5 \Rightarrow Q_d^2 = 140.$$

Отже, при падінні ціни до $0{,}5\$$ пропозиція бензину впаде на $23{,}53$ млрд. галонів, а попит зросте на 40 млрд. галонів. Але оскільки квота складає 20 млрд. галонів бензину на рік, то дефіцит товару буде складати 120 млрд. галонів (якщо весь ринок складається з імпортного бензину), якщо $76{,}47$ млрд. галонів є місцевим, то в цьому випадку дефіцит складе $43{,}53$ млрд. галонів.

Задача 3.

Маємо рівноважні параметри ринку деякого товару: $p^* = 10, Q^* = 100$. Після введення податку (дотації, субсидії), ціна змінилась на 20%. Яким був податок (дотація, субсидія), якщо еластичності попиту та пропозиції в точці рівноваги дорівнюють $-0{,}5$ та $0{,}4$ відповідно.

Розв'язок:

Якщо $Q_d = a - bp$ та $Q_s = c + dp$, то з того, що $E_d = -0{,}5 \Rightarrow Q_d = 150 - 5p$, а $E_s = 0{,}4 \Rightarrow Q_s = 60 + 4p$.

<u>Якщо ввели податок</u>, то ціна зросла на 20%, тепер $p' = 12$,

$$c + d(p - t) = Q_s^t = Q_d = a - bp \Rightarrow t = 4{,}5. \quad \boxed{\Delta p = \frac{t}{1 + b/d}}.$$

<u>Якщо ввели дотацію</u>, то ціна впаде на 20%, тепер $p'' = 8$, тоді

$$c + d(p + h) = Q_s^h = Q_d = a - bp \Rightarrow h = 4{,}5. \quad \boxed{\Delta p = \frac{-h}{1 + b/d}}.$$

Якщо ввели субсидію, то ціна зросла на $\mathbf{20\%}$, тепер $p''' = 12$, тоді

$$c + dp = Q_s = Q_d^s = a - b(p - s) \Rightarrow s = 3{,}6\,.\ \boxed{\Delta p = \frac{s}{1 + d/b}}.$$

Ефективність раціонування через систему цін

Встановлення рівноважної ціни через механізм вільного ринку є ефективним способом розподілу ресурсів в економічній системі. З точки зору споживачів рівноважна ціна є оптимальною ціною попиту. Споживачі, які бажають придбати даний товар, готові були б заплатити за меншу його кількість більшу суму, а реально в результаті дії ринкових сил вони купляють більшу кількість товару за відносно меншою ціною. Різниця між сумою грошей, яку споживачі готові заплатити за даний товар (площа під кривою попиту, що обмежена зліва віссю цін, а справа – вертикальною лінією, що відповідає рівноважній кількості товару) і реальними споживчими видатками на нього (добуток рівноважної ціни та рівноважної кількості товару) називається *споживчим надлишком*, або *виграшем споживача* (рис. 1). Алгебраїчно виграш споживача виражається так:

$$TS = \int_0^{Q^*} P_d(Q)dQ - P^*Q^* \quad . \tag{1}$$

У випадку лінійної залежності величини попиту від ціни споживчий надлишок дорівнює площі трикутника P^*BC.

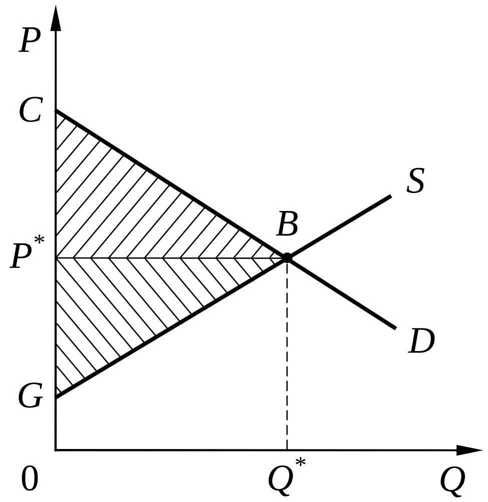


Рис. 1.

Довільна фіксація ціни вище або нижче за рівноважної залишає незадоволеними частину споживачів, що виражається у скороченні загальної величини споживчого надлишку.

З точки зору виробників рівноважна ціна є оптимальною ціною пропозиції. Різниця між сукупним доходом виробників від продажу товару (добуток рівноважної ціни та рівноважної кількості) і сукупними видатками, що пов'язані з його виробництвом (площа під кривою пропозиції), називається *рентою виробників*. Алгебраїчно рента виробників виражається таким чином:

$$TR = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} P_s(Q)dQ\,. \tag{2}$$

У випадку лінійної залежності величини пропозиції від ціни *рента виробників* буде відповідати площі трикутника P^*BG.

В точці рівноваги за умов вільного ринку рента виробників буде максимальною. Довільне відхилення ціни від рівноважного рівня створює або дефіцит, або надлишок товару, що в будь-якому випадку супроводжується скороченням ренти виробників.

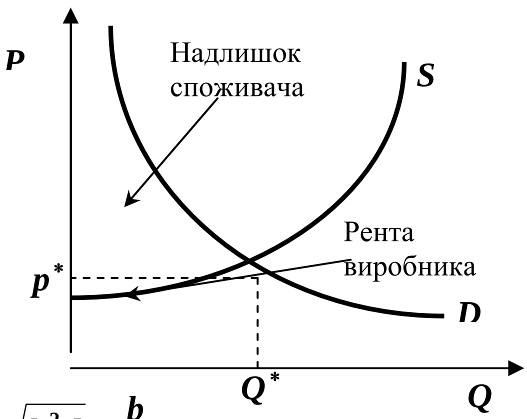
Ринкова ціна виконує інформаційну функцію, передаючи виробникам та споживачам відомості про ситуацію на ринку та про поведінку інших економічних агентів. Це дає можливість коректувати приватні плани. Орієнтуючись на ринкову ціну, виробники та споживачі розподіляють засоби між альтернативними можливостями їх використання. Отже, ціна виконує функцію розподілу ресурсів та продуктів. Крім того, даючи сигнали виробництву та споживанню, ціна стимулює виробників змінювати структуру виробництва, а споживачів – структуру споживання.

Зауважимо, що *мертвим вантажем податку* вважають величину втрат, що пов'язані зі зменшенням надлишку споживача та ренти виробника, які виникають в результаті скорочення обсягу виробництва і споживання порівняно з тим, який існував до введення податку.

Задача 4.

Для функцій попиту і пропозиції вигляду $Q_d = \dfrac{b}{p}$ та $Q_s = dp^2$ знайти ренту виробника та споживчий надлишок.

Розв'язок:



1) Виграш (рента) виробника:

$$TR = Q^* p^* - \int_0^{Q^*} P_s(Q)dQ .$$

$$Q_d = Q_s \Rightarrow p^* = \sqrt[3]{b/d}, Q^* = \sqrt[3]{b^2 d} ,$$

$$Q^* p^* = b .$$

Тоді,

$$TR = b - \int_0^{Q^*} \sqrt{\frac{Q}{d}} dQ = b - \frac{2}{3\sqrt{d}} \int_0^{Q^*} dQ^{\frac{3}{2}} = b - \frac{2}{3\sqrt{d}} \sqrt{b^2 d} = \frac{b}{3} .$$

2) Споживчий надлишок:

$$TS = \int_0^{Q^*} P_d(Q)dQ - p^* Q^* = \int_0^{Q^*} \frac{b}{Q_d} dQ - b = b\left(\int_0^{Q^*} d\ln Q - 1 \right) =$$

$$= b(\ln Q^* - \ln 0 - 1) = b(\ln Q^* + \infty - 1) = \infty .$$

Задачі для самостійної роботи:

Задача 5.

Умови попиту та пропозиції на ринку блокнотів описуються рівняннями: $Q_d = 110 - 10p$ та $Q_s = 10 + 10p$. Знайти: 1)параметри рівноваги ринку блокнотів, 2) якщо держава вводить податок у розмірі $0{,}5$ грн. за блокнот, то яким чином зміняться параметри рівноваги (ціна та обсягу), хто виграє та хто програє від введення податку, 3) визначити величину "мертвого вантажу" податку, що утворюється в результаті введення непрямого податку.

Задача 6.

Внутрішній попит на олівці описується рівнянням $\boldsymbol{Q_d} = \mathbf{16} - \mathbf{2}\boldsymbol{p}$, а пропозиція – $\boldsymbol{Q_s} = \mathbf{8} + \mathbf{2}\boldsymbol{p}$. Світова ціна товару складає $\mathbf{2{,}5}$ грн. Яку кількість товару країна буде імпортувати чи експортувати (млн. шт.)? Яким чином зміниться суспільний добробут? Якщо уряд вирішить ввести субсидію на експорт чи імпорт товару в розмірі $\mathbf{0{,}5}$, то яким чином це рішення вплине на внутрішніх споживачів і виробників та на суспільний добробут?

Споживання

Споживач – група індивідуумів, що мають спільний бюджет і витрачають його на купівлю товарів та послуг для свого існування. Вважатимемо, що маємо скінчену кількість товарів ($\boldsymbol{n}$). Обсяг споживання задаватимемо вектором $\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_n})^{\boldsymbol{T}}$. Зрозуміло, що $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^n}$, якщо $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{R^n}$, то $\boldsymbol{X}$ – простір товарів. Розглянемо два вектори споживання для конкретного споживача. Будемо вважати, що споживач може завжди однозначно визначити, що переважає: $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ чи $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$. Порівнюються ці вектори за відношенням переваги.

Порядкові функції корисності

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ називається *функцією корисності* (індикатором переваги), якщо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})$ тоді і лише тоді, коли $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$.

Корисність – це здатність задовольнити одну чи декілька потреб людини.

Розглядатимемо неперервні функції корисності. Якщо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ є неперервна та диференційована, то $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x_i}} > 0$ – умова монотонності; це означає, що з *ростом споживаного товару корисність зростає*. Друга похідна функції корисності є від'ємною $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x_i^2}} < 0$, тобто споживані послідовно частини деякого товару мають властивість спадної корисності.

Таким чином, чим більше товару ми маємо, тим меншу цінність для нас має кожна наступна одиниця товару.

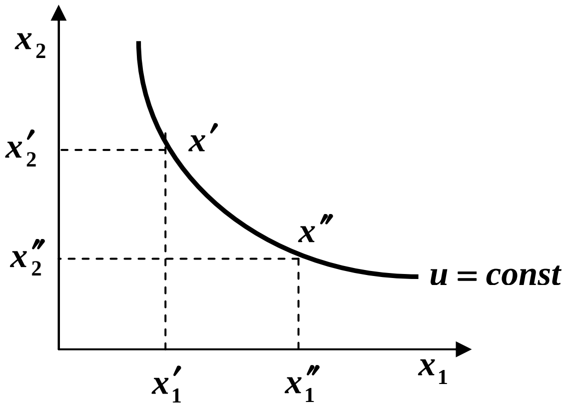
Множина байдужості (нечутливості). Карта кривих байдужості

Нехай маємо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. Розглянемо набори товарів, для яких значення корисності $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{const}$. Множина байдужості (нечутливості) до вибору товарів матиме вигляд:

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} | \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{const}\}.$$

Приклад. Нехай $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}_1^{1/2}\boldsymbol{x}_2^{1/3}$. Тоді, $\overline{\boldsymbol{X}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 2\boldsymbol{x}_1^{1/2}\boldsymbol{x}_2^{1/3} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{const}\right\}$.

Тоді $\boldsymbol{x_2} = \dfrac{\boldsymbol{c^3}}{8\boldsymbol{x}_1^{3/2}}$ – параболи – це і є множини байдужості (нечутливості) – *криві байдужості*. Множина кривих байдужості при різних значеннях $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{const}$ утворює *карту кривих байдужості*.



Граничною нормою заміщення називається величина, яка вказує від якої кількості товару $\boldsymbol{x_2}$ згоден відмовитись споживач, щоб отримати ще додаткову одиницю товару $\boldsymbol{x_1}$, залишаючись на тій же кривій байдужості. Цю величину позначають

$MRS_{x_1x_2}$ (Marginal Rate of Substitution)

$$MRS_{x_1x_2}=-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1},$$

$$MRS_{x_1x_2}=-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=-\frac{x_2''-x_2'}{x_1''-x_1'}>0,$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2=0,$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=-\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}\Rightarrow MRS_{x_1x_2}=\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}.$$

Основні положення теорії поведінки споживача

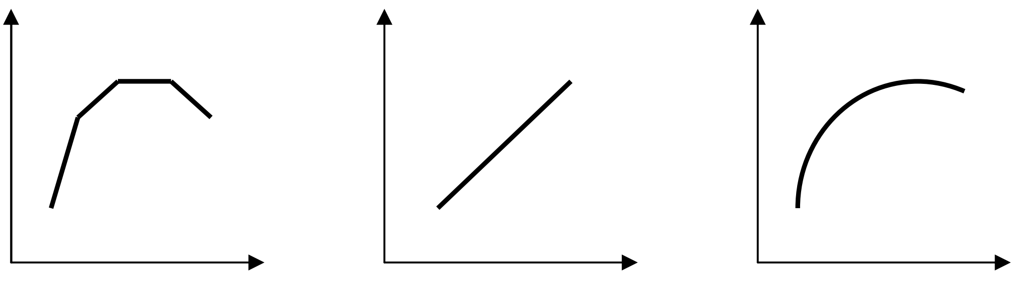
В цій теорії споживання покладають:
1. Грошовий доход обмежений.
2. Ціни на товари не залежать від кількості товару.
3. Споживачі намагаються отримати максимальну корисність від куплених товарів.

Вибір ґрунтується на таких умовах:
1. *множинність видів споживання* – кожен споживач прагне споживати деяку множину товарів,
2. *ненасиченість* – споживач прагне придбати більшу кількість товарів та послуг (будемо вважати що по жодному з товарів немає насичення),
3. *транзитивність* –якщо ***x, y, z*** – набори товарів з простору ***X***, і споживач надає перевагу набору ***x*** перед набором ***y*** (тобто, $x \succeq y$), також набору ***y*** перед набором ***z*** ($y \succeq z$), то він надає перевагу набору ***x*** перед набором ***z*** (тобто $x \succeq z$).
4. *субституція* – (заміна) – споживач може відмовитись від деякої кількості товару A, якщо йому запропонують більшу кількість товару-замінника.

Поряд із загальними принципами 1-4 існують *деякі особливості*, які визначають поведінку споживача *впливом вподобань та переваг*:
1) *ефект приєднання до більшості* – споживач не хоче відрізнятися від інших і купує те, що й інші. Споживач є залежним від думки інших споживачів – пряма залежність.
2) *ефект неприєднання до більшості* – у споживача переважає бажання виділитися у натовпі. Залежить від вибору інших, але залежність обернена – не так як всі.
3) *ефект Веблена* – товари використовуються не лише за їх прямим призначенням, а й для того, щоб викликати подив та виділитися, справити враження.

Будемо вважати, що функція корисності є *монотонною та строго опуклою*:

$$\forall x,y\in X\quad u(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda u(x)+(1-\lambda)u(y),\qquad 0<\lambda<1.$$



Надалі будемо користуватися двічі неперервною диференційованою функцією корисності $u(x)$ з від'ємно визначеною матрицею Гессе:

$$\ddot{u}(x) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\substack{i=\overline{1,n}, \\ j=1,n.}} .$$

Очевидно, що ця матриця є симетричною. Оскільки
$\ddot{u}(x)$ – від'ємнозначна, то

$$\ddot{u}(x) \; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$$

Закон Гессену: гранична корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням обсягу споживання цього товару.

Неокласична задача споживання. Модель раціональної поведінки споживача

Споживач має кошти I – бюджет (дохід) споживача. Під неокласичною задачею споживання будемо розуміти задачу, що пов'язана з раціональним вибором набору товарів і послуг при заданій функції корисності та обмеженому бюджеті. Нехай маємо ціни на товари $p = (p_1,..., p_n)$, набір товарів $x = (x_1,..., x_n)^T$, а також дохід I. Витрати на споживання товарів є (x, p).

Раціональна поведінка споживача полягає в максимізації корисності від набору товарів при обмежені на витрати. Тобто, маємо таку задачу:

$$\begin{cases} u(x) \to \max, \\ (x,p) \le I, \\ x \in X, x \ge 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u(x_1,..., x_n) \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i \le I, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

яка визначатиме раціональну поведінку споживача.

Це є задача опуклого програмування. Враховуючи, що $u(x)$ є неперервна, а множина, де потрібно знайти оптимальне значення корисності, є замкненою і обмеженою (компакт), то ця задача має єдиний розв'язок.

Доход споживача та ціни на товари і послуги формують *бюджетні обмеження споживача*. Графічно це відображається *бюджетною лінією* або лінією бюджетного обмеження.

Необхідну і достатню умови оптимального розв'язку задачі (1) отримаємо з теореми Куна-Такерра.

Побудуємо функцію Лагранжа для даної задачі:

$L(x,\lambda) = u(x) + \lambda(I - (x, p))$, де λ – множник Лагранжа.

Необхідна та достатня умови оптимальності:

$$\begin{cases} 1) \dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i \le 0, i = \overline{1,n}. \\ 2) \left(\dfrac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i \right) \cdot x_i^* = 0, i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3)\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial\lambda} = I-(x^*,p)\ge 0. \\ 4)\left(I-(x^*,p)\right)\cdot\lambda^* = 0, x^*\ge 0, \lambda^*\ge 0. \end{cases}$$

Введемо позначення похідних, прийнятих в економіці:

$\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} = Mu_i(x)$ – гранична корисність і-го товару.

Тоді $Mu_i(x^*) \le \lambda^* p_i, i=\overline{1,n}.$

$Mu_i(x^*) = \lambda^* p_i$, якщо $x_i^* > 0.$ $Mu_i(x^*) < \lambda^* p_i$, якщо $x_i^* = 0.$

Будемо вважати, що споживач придбав усі товари: $x_i > 0, i=\overline{1,n}$. У цьому випадку ми будемо мати слідуючи умову:

$$\begin{cases} \dfrac{Mu_i(x^*)}{p_i} = \lambda^*, i=\overline{1,n}, x_i^* > 0, \\ \Rightarrow \lambda^* > 0. \\ p_i > 0 \\ \Rightarrow I-(x^*,p) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Звідси маємо, що x^* лежить на бюджетній лінії.

(2) є умовою оптимальності поведінки споживача. Це є система з $(n+1)$ нелінійних рівнянь.

Якщо з перших n рівнянь виразити λ^*, то матимемо такі співвідношення:

$$\lambda^* = \frac{Mu_1(x^*)}{p_1} = \ldots = \frac{Mu_n(x^*)}{p_n}.$$

Отже, відношення граничної корисності до відповідної ціни в точці x^* є постійною. Це співвідношення називається *еквімаржинальним принципом* (принцип рівності граничних величин).

Наслідки:

1) Якщо $x^* > 0$, то $Mu_i = \lambda^* p_i, i=\overline{1,n} \Rightarrow$ гранична корисність пропорційна цінам на товари.
2) Якщо $\lambda^* > 0$, то $I = (x^*, p) \Rightarrow$ весь доход витрачається на придбання товарів.

З теорії математичного програмування відомо, що

$\lambda^* = \dfrac{\partial u(x^*(p,I))}{\partial I}$ – ця функція називається *граничною корисністю грошей споживача*.

Тут $u(x^*(p,I))$ – оптимальне споживання x^* залежить від вектора цін $p=(p_1,\ldots,p_n)$ та від бюджету споживача I, а функція корисності опосередковано залежить від цих параметрів.

Задачі

Задача 1.

Функція u називається адитивною, якщо $u(x_1,\ldots,x_n) = u(x_1)+\ldots+u(x_n)$. Показати, що у випадку двох товарів з граничною нормою заміщення

$R(x_1,x_2) = -\dfrac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}$ функція корисності є адитивною тоді і лише тоді, коли $R \cdot \dfrac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial R}{\partial x_2}$ (*).

Розв'язок:

$\Rightarrow$ $u(x)$ – адитивна: $u(x_1,x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial^2 u_1/\partial x_1^2}{\partial u_2/\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 u_1/\partial x_1^2}{\left(\partial u_2/\partial x_2\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2},$$

$$R \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial u_1/\partial x_1}{\left(\partial u_2/\partial x_2\right)^3} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{-\partial^2 u_1/\partial x_1}{\partial u_2/\partial x_2},$$

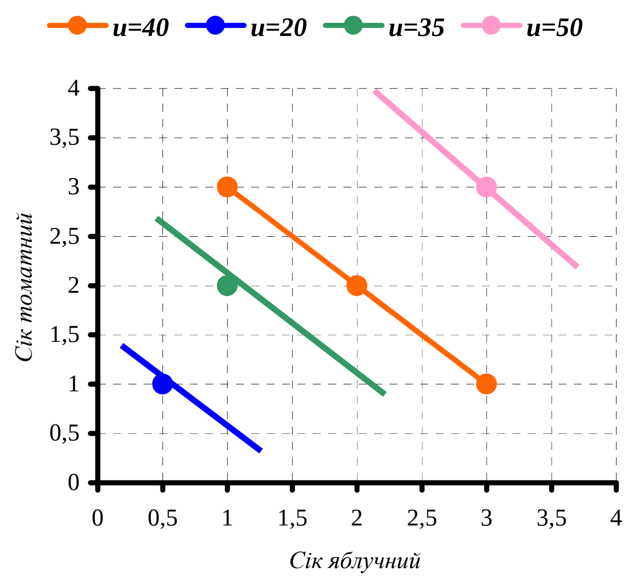
$$\frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1/\partial x_1}{\left(\partial u_2/\partial x_2\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}. \text{ Отже, } \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1/\partial x_1}{\left(\partial u_2/\partial x_2\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = R \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

$\Leftarrow$ Припускаємо, що тотожність (*) виконується, але $u(x_1,x_2)$ не є адитивною. Легко перевірити прямими обчисленнями, що коли u не адитивна, тоді тотожність (2) виконуватися не може, а це суперечить умові достатності.

Задача 2.

Андрій любить споживати на сніданки свіжі соки. Орієнтуючись на свої смаки, він склав таблицю корисності. Відобразіть графічно переваги Андрія:

Сік томатний	2	1	2	1	3	3	Склянки
Сік яблучний	2	0,5	1	3	1	3	Склянки
Корисність	40	20	35	40	40	50	Бали



Розв'язок:

З заданої таблиці випливає, що однаковий рівень корисності – 40 – Андрій має від споживання трьох комбінацій соку: (2:2), (1:3), (3:1), і всі ці значення належать до однієї кривої байдужості. Решта кривих, що характеризують корисності 20, 35 та 50, є паралельними до кривої байдужості з рівнем корисності 40

Функції попиту та граничної вартості грошей

Будемо вважати, що вектор $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}$ і бюджет $\boldsymbol{I} \in \boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{P}$ – є замкнена і обмежена множина цін, $\boldsymbol{J}$ – обмежений відрізок.

Нехай $\boldsymbol{x}^*$ та λ^* – розв'язок оптимальної задачі споживача – $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{I})$, $\lambda^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{I})$. Позначимо через $\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{I})$ – векторна функція – *функція попиту споживача*, кожна $\boldsymbol{i}$-та компонента якої є функція попиту споживача на $\boldsymbol{i}$-та товар. Ця функція визначає оптимальний вибір споживача при цінах $\boldsymbol{p}$ та доході $\boldsymbol{I}$. Позначимо через $\Lambda(\boldsymbol{p},\boldsymbol{I}) = \lambda^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{I})$ – *гранична корисність грошей споживача*.

Геометрична інтерпретація задачі раціональної поведінки споживача

Дамо геометричну інтерпретацію задачі (1) раціональної поведінки споживача. Розглянемо для цього випадок двох товарів $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$. Тоді оптимальне споживання задовольняє систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0, \\ &\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda^* p_2 = 0, \\ &I - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Розв'язок лежить на бюджетній прямій, що описується третім рівнянням в (1), і є точкою її дотику до кривої байдужості (множині точок нечутливості)

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{U}(x_1^*,\ x_2^*) = \boldsymbol{const}. \tag{2}$$

При цьому нахил (кутовий коефіцієнт) бюджетної прямої дорівнює $-(\boldsymbol{p}_1/\boldsymbol{p}_2)$, а нахил кривої байдужості $\boldsymbol{dx}_2/\boldsymbol{dx}_1$ можна знайти з рівняння

$$\boldsymbol{dU}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = \mathbf{0}, \tag{3}$$

що є наслідком рівняння кривої байдужості (2). З (3) маємо:

$$\boldsymbol{dx}_2/\boldsymbol{dx}_1 \Big|_{\text{на лінії байдужості}} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

Тобто, цей вираз є кутовим коефіцієнтом дотичної в точці $x^* = (x_1^*,\ x_2^*)$ до лінії байдужості. І оскільки в точці дотику, яка є оптимальним розв'язком задачі споживача, нахили рівні, то

$$-\frac{\partial U(x_1^*,x_2^*)/\partial x_1}{\partial U(x_1^*,x_2^*)/\partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2},$$

і, отже,

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial U(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2}\frac{\partial U(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}.$$

Останню умову можна отримати з рівнянь (1), виключивши множник Лагранжа. Тобто, бюджетна лінія є *дотичною* до лінії байдужості в точці x^* (рис. 1).

Отже, споживач, який максимізує свою корисність, купуватиме два види товару таким чином, щоб їхні граничні корисності у розрахунку на грошову одиницю ціни були рівні. Цей підхід називається *еквімаржинальним принципом*. Тобто, сутність цього принципу полягає в тому, що в точці оптимуму додаткова грошова одиниця (додатковий дохід споживача) приносить споживачеві однакову корисність, незалежно від того, на який товар вона витрачається.

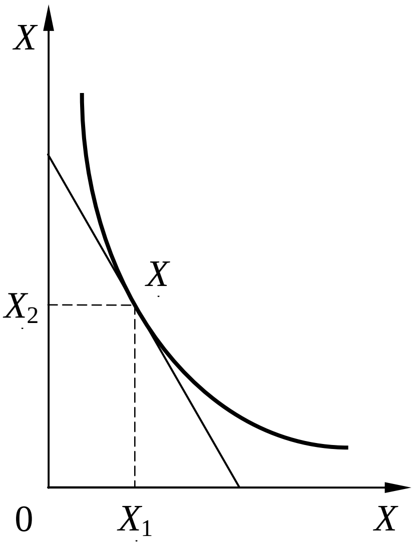


Рис. 1

Задачі

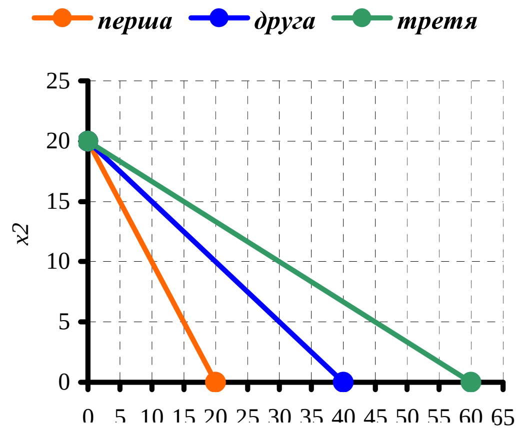
Задача 1.

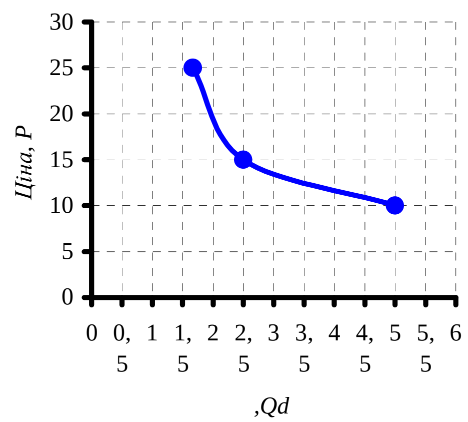
Побудувати криві попиту на товар, використовуючи карту байдужості при бюджеті **100** грн.

$$p_1' \big| Q(p_1') = \xi_1^1 = 10,$$

$$p_1'' \big| Q(p_1'') = \xi_1^2 = 15,$$

$$p_1''' \big| Q(p_1''') = \xi_1^3 = 25.$$





Розв'язок:

1) $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 100$,

$$(0,20) \to 20 p_2 = 100 \Rightarrow p_2 = 5,$$

$$(20,0) \to 20 p_1 = 100 \Rightarrow p_1 = 5.$$

$$(\xi_1^1 = 10).$$

2)

$$(40,0) \to x_1 \cdot p_1'' = 100 \Rightarrow p_1'' = 100/40 = 2{,}5,$$

$(\xi_1^2 = 15)$,

3) $(60,0) \to x_1 \cdot p_1''' = 100 \Rightarrow p_1''' = {}^{100}\!/_{60} = {}^{5}\!/_{3}$,

$(\xi_1^3 = 25)$.

p_1	5	2,5	5/3
ξ_1	10	15	25

Задача 2 .

Функція корисності має вигляд: $u = x_1 \cdot x_2$, $p_1 = 1$ грн., $p_2 = 3$ грн., $I = 12$ грн. Якщо ціна першого товару збільшиться вдвічі, то як має змінитися доход, щоб корисність споживача залишилися на попередньому рівні? Знайти обсяги споживання двох даних товарів до та після зміни ціни.

Розв'язок:

Маємо наступну задачу:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \to \max, \\ x_1 + 3x_2 \le 12. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = x_1 \cdot x_2 + \lambda(12 - x_1 - 3x_2) \to \max, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1^* &= 6, \\ x_2^* &= 2, \\ \lambda^* &= 2. \end{aligned}}$$

Отже, корисність споживача дорівнює $u(x_1^*, x_2^*) = 6 \cdot 2 = 12$.

Ціна на перший товар змінилася. Отже, маємо іншу задачу:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \to \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \cdot \alpha. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = x_1 \cdot x_2 + \lambda(12 \cdot \alpha - 2x_1 - 3x_2) \to \max, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 \cdot \alpha - 2x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_1^{**} &= \frac{12 \cdot \alpha}{4}, \\ x_2^{**} &= \frac{12 \cdot \alpha}{6}. \end{aligned}}$$

Отже, $u(x_1^{**}, x_2^{**}) = \dfrac{(12 \cdot \alpha)^2}{4 \cdot 6} = 12 \Rightarrow (12 \cdot \alpha)^2 = 12^2 \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$. Доход має зрости в $\sqrt{2}$ раз. Тоді, $x_1^{**} = 3\sqrt{2}; x_2^{**} = 2\sqrt{2}.$

Задача 3 .

Споживач витрачає 130 грн. на придбання двох товарів. Гранична корисність першого товару дорівнює $Mu_1 = 30 - 2x_1$, де x_1 – кількість цього товару, а другого – $Mu_2 = 19 - 3x_2$, x_2 – кількість другого товару. Яку кількість першого та другого товару придбає раціональний споживач, якщо ціни на товари дорівнюють, відповідно, $p_1 = 20$ грн. та $p_2 = 10$ грн. Визначити функцію корисності та корисність товарів у точці споживчої рівноваги. Побудувати криву байдужості в точці рівноваги.

Розв'язок:

$I=130$ грн., $Mu_1=30-2x_1$, $Mu_2=19-3x_2$. Відомо, що $Mu_i=p_i\cdot\lambda$. Тоді, $\lambda=\dfrac{Mu_1}{p_1}=\dfrac{Mu_2}{p_2}\Rightarrow\ \dfrac{30-2x_1}{20}=\dfrac{19-3x_2}{10}\Rightarrow\ 15-x_1=19-3x_2\Rightarrow\ -x_1+3x_2=4$.

Додамо до цього рівняння бюджетне обмеження та отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases}-x_1+3x_2=4,\\ 20x_1+10x_2=130.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^*=5,\\ x_2^*=3.\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=30-2x_1\Rightarrow u(x_1,x_2)=30x_1-x_1^2+c_2(x_2),$$

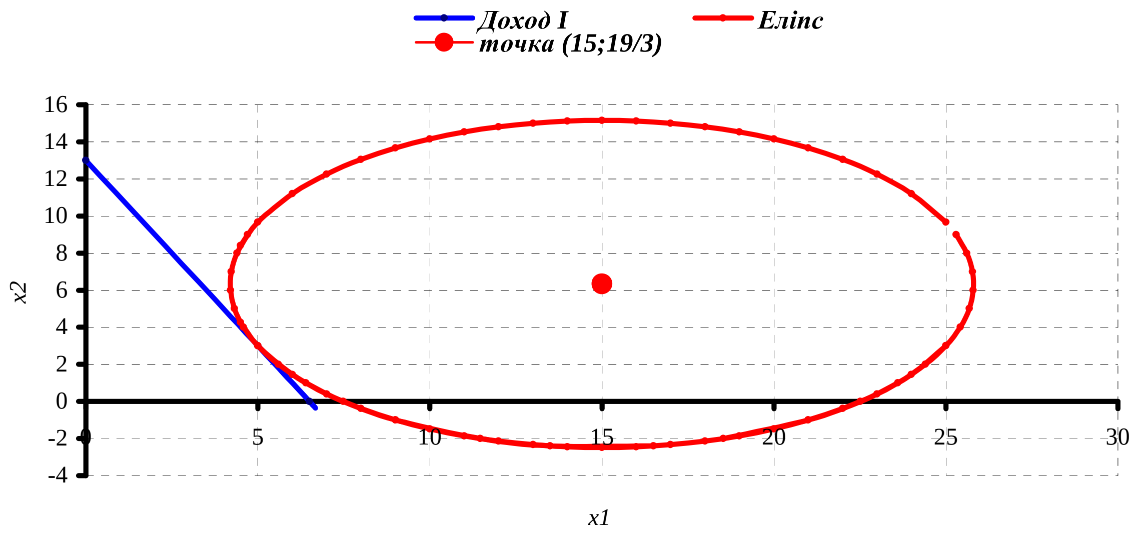
$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=19-3x_2\Rightarrow u(x_1,x_2)=19x_2-\frac{3}{2}x_2^2+c_1(x_1).$$

Оскільки не має іншої вимоги, то можна вважати, що

$u(0,0)=0$. Тоді, $u(x_1,x_2)=30x_1+19x_2-x_1^2-\dfrac{3}{2}x_2^2$,

$$u(x_1^*,x_2^*)=30\cdot5+19\cdot3-5^2-\frac{3}{2}3^2=150+57-25-\frac{27}{2}=\frac{337}{2}=168{,}5.$$

$30x_1+19x_2-x_1^2-\dfrac{3}{2}x_2^2=\dfrac{337}{2}\Rightarrow\quad \dfrac{(x_1-15)^2}{700/6}+\dfrac{\left(x_2-19/3\right)^2}{700/9}=1$ – крива байдужості є еліпс.



Задача 4.

Оптимальний рівень корисності непрямо залежить від цін p та доходу I, оскільки $u^*=u(x^*)=u^*(p,I)$, де $x^*=x^*(p,I)$ – функція попиту. А функція $u^*(p,I)$ – називається *непрямою функцією корисності*. Принцип вилучення податків типу рівності "жертв" вимагає, щоб $u^*(p,I)-u^*(p,I-T(I))=const$ для всіх I, де $T(I)$ – частка доходу, що береться як податок на дохід I.

Знайти залежність податків від доходу для мультиплікативної функції корисності при $n=3$. Показати, що $\dfrac{\partial T}{\partial I}>0$.

Розв'язок:

Отже, $u(x_1, x_2, x_3) = ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$, причому $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ (з властивостей функцій корисності), $a > 0$.

Функція Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) \to \max,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} - \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma} - \lambda p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = a\gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1} - \lambda p_3 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{\alpha I}{p_1(\alpha + \beta + \gamma)}, \\ x_2^* = \dfrac{\beta I}{p_2(\alpha + \beta + \gamma)}, \\ x_3^* = \dfrac{\gamma I}{p_3(\alpha + \beta + \gamma)}. \end{cases}$$

$u(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = aI^{\alpha+\beta+\gamma} \cdot k(p_1, p_2, p_3)$, де

$k(p_1, p_2, p_3) = \dfrac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}}{p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma}(\alpha + \beta + \gamma)^{\alpha+\beta+\gamma}}$ – функція від цін товарів. Очевидно, що $k > 0$.

$u(p, I) = a \cdot k \cdot I^{\alpha+\beta+\gamma}$, тоді $u(p, I - T(I)) = a \cdot k \cdot (I - T(I))^{\alpha+\beta+\gamma}$.

$u(p, I) - u(p, I - T(I)) = const = c \Rightarrow I^{\alpha+\beta+\gamma} - (I - T(I))^{\alpha+\beta+\gamma} = c_1$, де $c_1 = \dfrac{c}{a \cdot k}$.

$\dfrac{\partial}{\partial I}\left(I^{\alpha+\beta+\gamma} - (I - T(I))^{\alpha+\beta+\gamma}\right) = \dfrac{\partial c_1}{\partial I} = 0$. Позначимо $\alpha + \beta + \gamma = \xi$. Тоді

$\xi \cdot I^{\xi-1} - \xi(I - T(I))^{\xi-1} \cdot \left(1 - \dfrac{\partial T}{\partial I}\right) = 0$,

$-I^{\xi-1} + (I - T(I))^{\xi-1} = \dfrac{\partial T}{\partial I}(I - T(I))^{\xi-1}$, $1 - \left(\dfrac{I}{I - T(I)}\right)^{\xi-1} = \dfrac{\partial T}{\partial I}$.

Тоді $\dfrac{\partial T}{\partial I} > 0$, коли $\left(\dfrac{I}{I - T(I)}\right)^{\xi-1} < 1$. **(*)**

Але оскільки $\dfrac{I}{I - T(I)} > 1$ (у випадку, коли $T(I) \neq 0$), то нерівність **(*)** виконується лише тоді, коли $\xi - 1 < 0$. Отже, для того, щоб $\dfrac{\partial T}{\partial I}$ була додатною, необхідно на параметри функції корисності накласти умову $\alpha + \beta + \gamma < 1$.

Визначимо $T(I)$ в явному вигляді. Оскільки $I^{\xi}-\left(I-T(I)\right)^{\xi}=c_1$, то $\left(I^{\xi}-c_1\right)^{1/\xi}=I-T(I)\Rightarrow T(I)=I-\left(I^{\xi}-c_1\right)^{1/\xi}$. Зокрема, якщо $\xi=\alpha+\beta+\gamma=1$, то $T(I)=c_1=const$.

Задача 5.

Розглянемо модель поведінки споживача за Хіксом. Функція корисності споживача має вигляд $u=4x_1^{1/4}x_2^{1/5}x_3^{1/2}$. Є деякий заданий рівень корисності u_0. Необхідно досягнути рівня корисності, який би був не меншим за u_0, але при цьому витрати споживача були б мінімальними. Знайти функції попиту споживача на дані товари.

Розв'язок:

Модель Хікса має вигляд:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i x_i\to\min\\ u(x)\ge u_0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3\to\min,\\ 4x_1^{1/4}x_2^{1/5}x_3^{1/2}\ge u_0.\end{cases}$$

Тобто маємо таку задачу:

$$L(x,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\lambda\left(4x_1^{1/4}x_2^{1/5}x_3^{1/2}-u_0\right)\to\min.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=p_1+\lambda x_1^{-3/4}x_2^{1/5}x_3^{1/2}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=p_2+\lambda\dfrac{4}{5}x_1^{1/4}x_2^{-4/5}x_3^{1/2}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3}=p_3+\lambda 2x_1^{1/4}x_2^{1/5}x_3^{-1/2}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=4x_1^{1/4}x_2^{1/5}x_3^{1/2}-u_0=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^*=u_0^{20/19}\left(\dfrac{5}{4^6}\right)^{4/19}p_1^{-14/19}p_2^{4/19}p_3^{10/19},\\ x_2^*=u_0^{20/19}\left(\dfrac{1}{5^3 2^4}\right)^{5/19}p_1^{5/19}p_2^{-15/19}p_3^{10/19},\\ x_3^*=u_0^{20/19}\left(\dfrac{5^4}{2^{39}}\right)^{1/19}p_1^{5/19}p_2^{4/19}p_3^{-9/19}.\end{cases}$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 6.

Студент щотижнево отримує від батьків 50 грн. на їжу та розваги. Зобразити бюджетну лінію студента для кожної із ситуацій:

	Ціна продуктів	Ціна розваг
I	5 грн	5 грн
II	10 грн	5 грн
III	5 грн	10 грн
IV	4 грн	4 грн
V	5 грн	5 грн, але доход збільшився до 55 грн.

Задача 7.

Щоб врахувати в теорії споживання грошовий капітал, потрібно припустити, що функція корисності залежить не лише від набору товарів, але й від усіх цін та цінності грошового капіталу, оскільки характер попиту на гроші залежить від цін. Отже, будемо вважати, що $u=u(x,p_0K,p)$, де K – грошовий капітал, p_0 – ціна грошей, p – вектор цін на товари x. Звичайно вважається, що функція u є однорідною нульового степеня відносно усіх $(n+1)$-ї ціни. Бюджетне обмеження споживача матиме вигляд: $(p,x)=I+r(W-p_0K)$, де r – норма проценту на грошові активи, W – багатство.

Знайти функції попиту для товарів та грошей, якщо функція корисності є степеневою, а набір товарів складається з одного товару x.

(Запишемо степеневу функцію $u(x,p_0K,p)=Ax^{\alpha}(p_0K)^{\beta}p^{\gamma}$. Оскільки функція корисності однорідна, нульового степеня відносно цін, то

$$u(x,hp_0K,hp)=u(x,p_0K,p)\Rightarrow \qquad Ax^{\alpha}h^{\beta}(p_0K)^{\beta}h^{\gamma}p^{\gamma}=Ax^{\alpha}(p_0K)^{\beta}p^{\gamma}\Rightarrow$$

$h^{\beta+\gamma}=1\Rightarrow\beta+\gamma=0\Rightarrow\gamma=-\beta$, отже маємо такий вигляд функції корисності:

$$u(x,p_0K,p)=Ax^{\alpha}\left(\frac{p_0K}{p}\right)^{\beta}.$$

Розв'яжемо задачу:

$$\begin{cases} u(x,p_0K,p)\to\max,\\ px=I+r(W-p_0K). \end{cases}$$

Будуємо функцію Лагранжа: $L=u+\lambda(I+rW-rp_0K-px)\to\max$.)

Задача 9.

Маємо функції корисності для двох споживачів $u_1(x)=x_1x_2x_3$ та $u_2(x)=x_2x_3x_4$. Знайти функцію попиту на другий товар.

Задача 10.

Можна розглядати проблему вибору між заробітком та вільним часом (дозвіллям) з точки зору теорії споживання. Тоді проблема постає такою задачею:

$$\begin{cases} u(x,l)\to\max,\\ (p,x)=I+wh,\\ l+h=q,\\ \partial u/\partial l>0. \end{cases}$$

де h – робочий час,
w – рівень заробітної плати,
I – нетрудовий дохід,
q – загальний наявний час.

Корисність u максимізується за обома аргументами x та l. Знайти функцію попиту для товарів x та дозвілля l. Якою має бути функція корисності? Чи може дозвілля бути малоцінним? А типу товарів Гіффена?

Основне рівняння теорії споживання
Класифікація товарів

Задачами порівняльної статики споживання є вивчення *чутливості розв'язку* задачі раціональної поведінки споживача до змін параметрів p та I, тобто, у дослідженні поведінки функції попиту та граничної вартості грошей при зміні цін та доходу. За означенням функцій попиту $\xi(p,I)$ та граничної вартості грошей $\Lambda(p,I)$, вони є розв'язком такої системи рівнянь:

$$I-(p,\xi(p,I))=0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}(\xi(p,I))-\Lambda(p,I)p^T=0.$$

Основні показники порівняльної статики споживання можна отримати шляхом диференціювання тотожностей за параметрами $\boldsymbol{p}$ та $\boldsymbol{I}$.

Показники порівняльної статики споживання є такими:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{I}} = -\mu \ddot{U}^{-1}\boldsymbol{p}^T,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{I}} = -\mu,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{p}} = \mu \ddot{U}^{-1}\boldsymbol{p}^T\xi^T + \mu \ddot{U}^{-1}\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}\ddot{U}^{-1}\Lambda + \ddot{U}^{-1}\Lambda,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{p}} = \mu\xi^T + \mu\Lambda\boldsymbol{p}\ddot{U}^{-1},$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_{comp} = \mu \ddot{U}^{-1}\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}\ddot{U}^{-1}\Lambda + \ddot{U}^{-1}\Lambda;$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p}\right)_{comp} = \mu\Lambda\boldsymbol{p}\ddot{U}^{-1},$$

де $\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{I}} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \boldsymbol{I}}\right)^{T}_{i=1,n}$ та $\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{I}}$ характеризують міру чутливості функцій ξ та Λ відносно змін доходу; $\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \boldsymbol{p}_j}\right)^{n}_{i,j=1}$ та $\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{p}_i}\right)_{i=1,n}$ – вплив цін на товари на зміну функцій ξ та Λ; $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_{comp} = \left(\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \boldsymbol{p}_j}\right)_{comp}\right)^{n}_{i,j=1}$, $\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_{comp} = \left(\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{p}_i}\right)_{comp}\right)_{i=1,n}$ – вплив компенсованих цін на зміну функцій ξ та Λ; $\mu = -(\boldsymbol{p}\ddot{U}^{-1}\boldsymbol{p}^T)^{-1} > 0$.

Компенсована зміна ціни – це така зміна ціни товару, при якій дохід компенсується таким чином, щоб корисність залишалась незмінною.

Важливим інструментом дослідження в неокласичній теорії споживання є *рівняння Слуцького*. Це рівняння в матричній формі має вигляд:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial I}\right)\xi^T$$

та описує загальний ефект від впливу цін на функції попиту через вплив компенсованої зміни цін на попит та вплив зміни доходу на попит. Останнє рівняння є безпосереднім наслідком виразів відповідних показників порівняльної статики споживання.

З рівності $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_{comp} = \mu \ddot{U}^{-1}\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{p}\ddot{U}^{-1}\Lambda + \ddot{U}^{-1}\Lambda$ випливає, що матриця *впливу заміни* $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_{comp}$ є симетричною та від'ємно напіввизначеною.

Враховуючи симетричність вказаної матриці, з *рівняння Слуцького* маємо умову симетричності:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \boldsymbol{p}_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial \boldsymbol{I}}\xi_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial \boldsymbol{p}_i} + \frac{\partial \xi_j}{\partial \boldsymbol{I}}\xi_i, \qquad \boldsymbol{i, j = 1, \ldots, n}.$$

З від'ємної напіввизначеності матриці випливає, що частинні значення впливу заміни є від'ємними:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Це означає, що *компенсоване зростання ціни товару завжди призводить до зменшення попиту на цей товар*.

За якісною поведінкою похідних $\partial\xi_i/\partial p_j$, $\partial\xi_i/\partial I$ та $(\partial\xi_i/\partial p_j)_{comp}$ визначається класифікація товарів за попитом, що грає свою не останню роль в економічних дослідженнях.

При моделюванні поведінки споживача слід розмежовуватися дією двох ефектів, які спостерігаються при зміні цін на один з товарів. *Ефект доходу* – це тільки ті зміни у споживанні, що спричинені зміною реального доходу споживача під впливом руху цін. *Ефект заміщення* – це тільки ті зміни у споживанні товару, які є результатом зміни цін цього товару відносно цін на інші товари. Ці два ефекти діють одночасно. Тому реальна спрямованість зміни споживання буде рівнодіючою ефектів доходу та заміщення.

Якщо мова йде про якісний товар, то щодо такого товару обидва ефекти діють в одному напрямку. Що ж до впливу зміни ціни на споживання неякісних товарів, то спрямованість впливу ефектів доходу та заміщення є протилежною. Якщо ефект заміщення має більший вплив, то із зростанням ціни споживання i-го товару зменшується, а при її зниженні – збільшується. Однак може скластися ситуація, коли переважає ефект доходу, тоді при зростанні ціни зростає і споживання, а при її зменшенні споживання також зменшується.

Неякісний товар, для якого ефект доходу переважає над ефектом заміщення, називається *Гіффеновим товаром*.

Отже, визначимо різні товари таким чином. Товар $\boldsymbol{i}$ називається *нормальним (товаром Гіффена)*, якщо $\partial\xi_i/\partial p_i < 0$ $(\partial\xi_i/\partial p_i > 0)$. Товар $\boldsymbol{i}$ називається *цінним (малоцінним)*, якщо $\partial\xi_i/\partial I > 0$ $(\partial\xi_i/\partial I < 0)$.

Поєднавши дві наведені класифікації товарів за реакцією попиту на зміни цін та доходу, можна отримати загальну сумісну класифікацію, яка наведена в таблиці:

Вплив зміни часткової ціни	Вплив зміни доходу	Цінні товари $(\partial\xi_i/\partial I > 0)$	Малоцінні товари $(\partial\xi_i/\partial I < 0)$
Нормальні товари $(\partial\xi_i/\partial p_i < 0)$		Нормальні цінні товари. *Приклад*: масло, м'ясо	Нормальні малоцінні товари. *Приклад*: хліб, маргарин у благополучній ситуації
Товари Гіффена $(\partial\xi_i/\partial p_i > 0)$		———	Товари Гіффена (малоцінні). *Приклад*: хліб, картопля, маргарин у неблагополучній ситуації

За характером взаємозалежності попиту на пари товарів такі пари поділяються на пари взаємозамінювальних та взаємодоповнювальних товарів (або супутніх товарів та субститутів).

Товари $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ є *взаємозамінювальними (взаємодоповнювальними)*, якщо компенсоване зростання ціни на один призводить до збільшення (зменшення) попиту на інший:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0 \qquad \left(\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0\right).$$

Задачі

Задача 1.

Функція корисності споживача дорівнює $u = x_1 x_2$. Ціна першого товару складає 10грн., а другого – 2 грн. Споживач витрачає 60 грн. на ці два товари. Ціна другого товару зростає до 5 грн. На скільки потрібно компенсувати споживача, щоб його добробут не змінився? Щоб структура його споживання не змінилася? Чому дорівнює ефект доходу та ефект заміщення?

Розв'язок:

$$L = x_1 x_2 + \lambda(60 - 10x_1 - 2x_2) \to \max$$

а) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 10\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 10x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_1^* = 3, \\ x_2^* = 15. \end{array}}$$

б) При $p_2 = 5$ грн. розв'язуємо нашу задачу:

$$L = x_1 x_2 + \lambda(60 - 10x_1 - 5x_2) \to \max$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 10\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 10x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_1^{**} = 3, \\ x_2^{**} = 6. \end{array}}$$

Загальний ефект зміни споживання другого товару в результаті зростання ціни дорівнює $\Delta x_2 = x_2^{**} - x_2^* = -9$.

в) Знаходимо, на скільки повинен змінитися дохід при зростанні ціни, щоб споживач міг би купляти попередню кількість другого товару:

$\Delta I = x_2^* \cdot \Delta p_2 = 15(5-2) = 45$ грн.

Отже, новий доход має бути $I' = 60 + 45 = 105$ грн.

г) Тепер при $I' = 105$ грн. та $p_1 = 10$ грн., $p_2 = 5$ грн. знаходимо так звану проміжну рівновагу споживача:

$$L = x_1 x_2 + \lambda(105 - 10x_1 - 5x_2) \to \max$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 10\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 105 - 10x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_1^{***} = 5{,}25; \\ x_2^{***} = 10{,}5. \end{array}}$$

Ефект заміщення дорівнює:

$\Delta x_2^{зам} = x_2^{***} - x_2^* = 10{,}5 - 15 = -4{,}5$,

а ефект доходу дорівнює:

$\Delta x_2^{дох} = x_2^{**} - x_2^{***} = 6 - 10{,}5 = -4{,}5$.

д) Тепер знайдемо величину доходу I'', при якому відбувається компенсована зміна ціни (тобто добробут споживача не змінюється $\to u = const$):

$u(x_1^*, x_2^*) = 3 \cdot 15 = 45$.

Розв'язуємо наступну задачу:

$L = x_1 x_2 + \lambda(I'' - 10x_1 - 5x_2) \to \max$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 10\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = I'' - 10x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} x_1'' = \dfrac{I''}{20}; \\ x_2'' = \dfrac{I''}{10}. \end{matrix}}$$

Оскільки $u = x_1'' \cdot x_2'' = 45$, тоді $\dfrac{I''}{20} \cdot \dfrac{I''}{10} = 45 \Rightarrow I'' = \sqrt{45 \cdot 200} = 30\sqrt{10} \approx 94{,}87.$

Отже, пряма компенсація була більшою (для збереження структури споживання). А компенсація для збереження попереднього рівня добробуту складатиме лише $\Delta I'' = I'' - I = 94{,}87 - 60 = 34{,}87$ грн.

Задача 2.

Для логарифмічної функції корисності при $n = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 18$, $\bar{x}_1 = 20$, $\bar{x}_2 = 5$, $b = e$. Знайти:

1) функцію попиту на товари та граничну корисність грошей (доходу);
2) матриця Гессе;
3) еластичності попиту на другий товар за доходом та цінами;
4) компенсовану зміну цін (матриця Слуцького).

Розв'язок:

1) $u(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \log_b(x_j - \bar{x}_j)$, $b > 1; a_j > 0; x_j > \bar{x}_j \geq 0$.

$u(x_1, x_2) = 3\ln(x_1 - 20) + 18\ln(x_2 - 5)$. Тоді функція Лагранжа:

$L(x, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2) \to \max\limits_{x,\lambda}$,

матриця Гессе:

$$\ddot{u}(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_1^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{(x_1 - 20)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-18}{(x_2 - 5)^2} \end{pmatrix} < 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{3}{x_1 - 20} - \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{18}{x_2 - 5} - \lambda p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{I + 120p_1 - 5p_2}{7p_1}, \\ x_2^* = \dfrac{6I + 5p_2 - 120p_1}{7p_2}, \\ \lambda^* = \dfrac{21}{I - 20p_1 - 5p_2} = \dfrac{21}{I - (p, \bar{x})} \end{cases}$$

де $\overline{x} = (20;5)^T$.

2) $$e_2^I = \frac{\partial x_2^*}{\partial I}\cdot\frac{I}{x_2^*} = \frac{6I}{6I + 5p_2 - 120p_1},$$

$$e_2^{p_1} = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\cdot\frac{p_1}{x_2^*} = \frac{-120p_1}{6I + 5p_2 - 120p_1},$$

$$e_2^{p_2} = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\cdot\frac{p_2}{x_2^*} = \ldots = \frac{6I - 120p_1}{6I + 5p_2 - 120p_1}.$$

Перевірка:

$\sum_{i=1}^{2} e_2^{p_i} + e_2^I = 0 \Rightarrow$ еластичності обчислено вірно.

3) Елементи матриці Слуцького – це: $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}}$.

$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial I}\xi_j$, тоді:

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial I}\xi_1 = \frac{-6I + 30p_2 + 120p_1}{49p_1^2} = \frac{-6(I - (p, \overline{x}))}{49p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_2}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial \xi_1}{\partial p_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial I}\xi_2 = \frac{6I - 30p_2 - 120p_1}{49p_1p_2} = \frac{6(I - (p, \overline{x}))}{49p_1p_2}.$$

Оскільки матриця Слуцького симетрична, то $\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_2}\right)_{\text{comp}} = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial p_1}\right)_{\text{comp}}$. Тоді,

$$\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial p_2}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial \xi_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial I}\xi_2 = \frac{-6I + 30p_2 + 120p_1}{49p_2^2} = \frac{-6(I - (p, \overline{x}))}{49p_2^2}.$$

Очевидно також, що $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i}\right)_{\text{comp}} < 0$, оскільки $I - (p, \overline{x}) > 0$.