# 3. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ГОСПОДАРСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

## 3.1. Загальна характеристика математичних методів аналізу

Широке використання математичних методів є важливим напрямком удосконалювання економічного аналізу, підвищує ефективність аналізу діяльності підприємств та їхніх підрозділів. Це досягається за рахунок скорочення термінів проведення аналізу, більш повного охоплення впливу факторів на результати комерційної діяльності, заміни наближених чи спрощених розрахунків точними обчисленнями, постановки і розв’язку нових багатовимірних задач аналізу.

Сформульовану математично задачу економічного аналізу можна розв’язати одним з відомих математичних методів. Ознаки класифікації економіко-математичних методів значною мірою умовні. Наприклад, задачі управління запасами можуть розв’язуватись методами математичного програмування та із застосуванням теорії масового обслуговування. Сітьове планування і управління використовують всілякі математичні методи

Наприклад, методи елементарної математики використовуються в економічних розрахунках при обґрунтуванні потреб у ресурсах, обліку витрат на виробництво, розробці планів, проектів, при балансових розрахунках і т.д.

Широке поширення в економічному аналізі мають методи математичної статистики. Ці методи застосовуються в тих випадках, коли зміну показників, що аналізують, можна представити як випадковий процес. Статистичні методи є основним засобом вивчення масових, повторюваних явищ та відіграють важливу роль у прогнозуванні поведінки економічних показників. Коли зв'язок між характеристиками, що аналізуються, не детермінований, а стохастичний, то статистичні та ймовірносні методи – це практично єдиний інструмент дослідження. Найбільшого поширення з математико-статистичних методів в економічному аналізі отримали методи множинного та парного кореляційного аналізу.

Економетричні методи є своєрідним поєднанням трьох областей знань: економіки, математики і статистики. Основою економетрії є економічна модель, під якою розуміють схематичне представлення економічного явища чи процесу за допомогою наукової абстракції, відображення їхніх характерних рис.

Найбільшого поширення в сучасній економіці отримав метод аналізу економіки „витрати-випуск”. Це матричні (балансові) моделі, що дозволяють у найбільш компактній формі представити взаємозв'язок витрат і результатів виробництва. Зручність розрахунків і чіткість економічної інтерпретації – головні особливості матричних моделей. Це важливо при створенні систем механізованої обробки даних, при плануванні виробництва продукції з використанням ЕОМ.

Методи математичного програмування – основний засіб розв’язання задач оптимізації виробничо-господарської діяльності. За своєю суттю це – засіб планових розрахунків. Цінність їх для економічного аналізу виконання бізнес-планів полягає в тому, що вони дозволяють оцінювати напруженість планових завдань, визначати лімітуючи групи устаткування, види сировини і матеріалів, одержувати оцінки дефіцитності виробничих ресурсів і т.п.

Теорія ігор як розділ дослідження операцій – це теорія математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності чи конфлікту декількох сторін, що мають різні інтереси.

Теорія масового обслуговування досліджує на основі теорії імовірностей математичні методи кількісної оцінки процесів масового обслуговування. Так, кожне із структурних підрозділів промислового підприємства можна представити як об'єкт системи обслуговування.

Загальною особливістю всіх задач, які пов'язані з масовим обслуговуванням, є випадковий характер досліджуваних явищ. Кількість вимог на обслуговування і часові інтервали між їхнім надходженням носять випадковий характер, їх не можна однозначно передбачити. Однак у своїй сукупності безліч таких вимог підкоряється певним статистичним закономірностям, кількісне вивчення яких і є предметом теорії масового обслуговування.

У ряді випадків доводиться знаходити розв’язок екстремальних задач при неповному знанні механізму явища, яке розглядається. Такий розв’язок відшукується експериментально.

В останні роки в економічній науці підсилився інтерес до формалізації методів емпіричного пошуку оптимальних умов протікання процесу, що використовують людський досвід та інтуїцію. Евристичні методи (розв’язки) – це неформалізовані методи розв’язку економічних задач, які пов'язані з господарською ситуацією, яка сформувалася, на основі інтуїції, минулого досвіду, експертних оцінок фахівців і т.д.

Застосування того чи іншого математичного методу в економічному аналізі спирається на методологію економіко-математичного моделювання господарських процесів і науково обґрунтовану класифікацію методів і задач аналізу.

За ознакою оптимальності всі економіко-математичні методи (задачі) поділяються на дві групи: оптимізаційні і неоптимізаційні. Якщо метод чи задача дозволяє шукати розв’язок за заданим критерієм оптимальності, то цей метод відносять до групи оптимізаційних методів. У випадку, коли пошук розв’язків ведеться без критерію оптимальності, відповідний метод відносять до групи неоптимізаційних методів.

За ознакою одержання точного розв’язку методи поділяються на точні та наближені. Якщо алгоритм методу дозволяє одержати тільки єдиний розв’язок за заданим критерієм оптимальності чи без нього, то даний метод відносять до групи точних методів. У випадку, коли при пошуку розв’язку використовується стохастична інформація і розв’язок задачі можна одержати з будь-яким ступенем точності, то метод відносять до групи наближених . До групи наближених методів відносять також і такі, які не гарантують одержання єдиного розв’язку за заданим критерієм оптимальності.

Таким чином, використовуючи тільки ці дві ознаки класифікації, всі економіко-математичні методи поділяються на чотири групи: 1) оптимізаційні точні методи; 2) оптимізаційні наближені методи; 3) неоптимізаційні точні методи; 4) неоптимізаційні наближені методи.

| Математичні методи | Оптимізаційні | Неоптимізаційні |
|---|---|---|
| Точні | Методи теорії оптимальних процесів, деякі методи математичного програмування і методи дослідження операцій | Методи елементарної математики і класичні методи математичного аналізу, економетричні методи |
| Наближені | Окремі методи математичного програмування, методи дослідження операцій, методи математичної теорії планування екстремальних експериментів, евристичні методи | Метод статистичних випробувань та інші методи математичної статистики |

Велике значення в аналізі господарської діяльності має поєднання методів (задач) балансових і факторних. Балансові методи – це методи аналізу структури, пропорцій, співвідношень. Деякі з прийомів балансового методу аналізу приводилися вище.

Під економічним факторним аналізом розуміються поступовий перехід від вихідної факторної системи (результативний показник) до кінцевої факторної системи (чи навпаки), розкриття повного набору прямих, кількісно вимірних факторів, що впливають на зміну результуючого показника.

При прямому факторному аналізі виявляються окремі фактори, що впливають на зміну результуючого показника чи процесу, встановлюються форми детермінованої (функціональної) чи стохастичної залежності між результативним показником і певним набором факторів і, нарешті, з'ясовується роль окремих факторів у зміні результуючого економічного показника.

Постановка задачі прямого факторного аналізу поширюється на детермінований і стохастичний випадок.

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, що характеризує зміну результуючого показника чи процесу; $x_1, x_2, ..., x_n$ – фактори, від яких залежить функція $f(x)$. Задано функціональну детерміновану форму зв'язку досліджуваного показника $y$ з набором факторів $x_1, x_2, ..., x_n$: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Нехай показник $y$ одержав приріст ($\Delta y$) за період, що аналізується. Потрібно визначити, якою частиною чисельний приріст функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ зобов'язаний приросту кожного аргументу (фактора). Сформульована в такий спосіб задача є постановкою задачі прямого детермінованого факторного аналізу.

Прикладами прямого, детермінованого, факторного аналізу є: аналіз впливу продуктивності праці і чисельності працюючих на обсяг виробленої продукції ($y$ – обсяг продукції; $x$, $z$ – фактори; задана функціональна форма зв'язку $y = x \cdot z$); аналіз впливу величини прибутку, вартості основних виробничих фондів і нормованих оборотних коштів на рівень рентабельності ($y$ – рівень рентабельності; $x$, $z$, $v$ – відповідні фактори; задана функціональна форма зв'язку $y = \dfrac{x}{z+v}$). Задачі прямого детермінованого факторного аналізу – найбільш розповсюджена група задач в аналізі господарської діяльності.

Розглянемо особливості постановки задачі прямого стохастичного факторного аналізу. Якщо у випадку прямого детермінованого факторного аналізу вихідні дані для аналізу подано у формі конкретних чисел, то у випадку прямого стохастичного факторного аналізу задані вибіркою (часовою чи поперечною). Розв’язування задач стохастичного факторного аналізу вимагає: глибокого економічного дослідження для виявлення основних факторів, що впливають на результуючий показник; підбору виду регресії, який би найкраще відбивав дійсний зв'язок досліджуваного показника з набором факторів; розробки методу, що дозволяє визначити вплив кожного фактора на результуючий показник.

Якщо результати прямого детермінованого аналізу вийти мають бути точними й однозначними, то стохастичного – з деякою імовірністю (надійністю), яку варто оцінити.

Прикладом прямого стохастичного факторного аналізу є регресійний аналіз продуктивності праці та інших економічних показників.

В економічному аналізі, крім задач, що зводяться до деталізації показника і до розбивки його на складові частини, існує група задач, де потрібно пов’язати ряд економічних характеристик у комплексі, тобто побудувати функцію, що містить у собі основні якості усіх розглянутих економічних показників-аргументів, тобто задач синтезу. У даному випадку ставиться обернена задача (щодо задачі прямого факторного аналізу) – задача об'єднання ряду показників у комплекс.

Нехай маємо набір показників $x_1, x_2, ..., x_n$, що характеризують деякий економічний процес ($L$). Кожний з показників однобічно характеризує процес $L$. Потрібно побудувати функцію $f(x)$ зміни процесу $L$, що містить у собі основні характеристики всіх показників $x_1, x_2, ..., x_n$ чи деяких з них у комплексі. Залежно від мети дослідження функція $f(x)$ повинна характеризувати процес у статиці чи в динаміці. Дана постановка задачі називається задачею оберненого факторного аналізу.

Задачі оберненого факторного аналізу можуть бути детермінованими і стохастичними. Прикладами задачі оберненого детермінованого факторного аналізу є задачі комплексної оцінки виробничо-господарської діяльності, а також задачі математичного програмування, у тому числі й лінійного. Прикладом задачі оберненого стохастичного факторного аналізу можуть слугувати виробничі функції, якими встановлюються залежності між величиною випуску продукції і витратами виробничих факторів (первинних ресурсів).

Для детального дослідження економічних показників чи процесів необхідно проводити не тільки одноступінчатий, але і ланцюговий факторний аналіз: статичний (просторовий) і динамічний (просторовий і в часі).

Нехай досліджується економічний показник $y$; $x_1, x_2, ..., x_n$ – фактори, що впливають на цей показник. Залежно від мети дослідження аналізується поведінка показника $y$ одним з методів факторного аналізу. Якщо $x_1, x_2, ..., x_n$ – функції первинних факторів, то для аналізу $y$ треба пояснити поведінку $x_1, x_2, ..., x_n$; для цього проводять подальшу деталізацію:

$$x_1 = l_1(z_1, z_2, \ldots, z_m);$$

$$x_2 = l_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = l_n(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_e).$$

Деталізація факторів може бути продовжена і далі. Закінчивши її, розв'язують обернену задачу факторного аналізу, синтезуючи результати дослідження для характеристики результуючого показника $y$. Такий метод дослідження називається ланцюговим статичним методом факторного аналізу.

При застосуванні ланцюгового динамічного факторного аналізу для повного вивчення поведінки результуючого показника недостатньо його статичного значення; факторний аналіз показника проводиться на різних інтервалах дроблення часу, на яких досліджується показник.

Економічний факторний аналіз може бути направлений на з'ясування дії факторів, що формують результати господарської діяльності, за різними джерелами просторового чи часового походження.

Аналіз динамічних (часових) рядів показників господарської діяльності, розщеплення рівня ряду на його складові (основну лінію розвитку – тренд, сезонну, чи періодичну складову, циклічну складову, що пов'язана з явищами відтворювання, випадкову складову) – задача часового факторного аналізу.

Класифікація задач факторного аналізу впорядковує постановку багатьох економічних задач, дозволяє виявити загальні закономірності. При дослідженні складних економічних процесів можлива комбінація постановок задач, якщо останні не відносяться цілком до деякого типу, що зазначений в класифікації.

## 3.2. Економіко-математичне моделювання як спосіб вивчення господарської діяльності

Математичне моделювання економічних явищ і процесів є важливим інструментом економічного аналізу.  Модель – умовний образ об'єкта управління (дослідження). Суб'єкт управління будує модель  так, щоб відобразити суттєві характеристики об'єкта – властивості, взаємозв'язки, структурні і функціональні параметри тощо. . В економічному аналізі використовують здебільшого математичні моделі, що описують досліджуване явище чи процес за допомогою рівнянь, нерівностей, функцій та інших математичних засобів. Розрізняють математичні моделі з кількісними характеристиками, записаними у вигляді формул; числові моделі з конкретними числовими характеристиками; логічні, записані за допомогою логічних виразів, і графічні, які виражені в графічних образах.

Економіко-математична модель повинна бути адекватною дійсності Процес моделювання можна умовно поділити на три етапи:

1) аналіз теоретичних закономірностей, які властиві явищу чи процесу, що досліджується, а також емпіричних даних про його структуру й особливості; на підставі такого аналізу формуються моделі;
2) визначення методів, за допомогою яких можна вирішити задачу;
3) аналіз отриманих результатів.

При економіко-математичному моделюванні часто виникає ситуація, коли економічна система, що вивчається, має занадто складну структуру, відсутні математичні методи, схеми, які б охоплювали всі основні особливості і зв'язки цієї системи. Такою економічною системою, наприклад, є економіка підприємства в цілому, у її динаміці, розвитку. Виникає необхідність спрощення досліджуваного об'єкта, виключення й аналізу деяких його другорядних особливостей задля того, щоб підвести цю спрощену систему під клас уже відомих структур, що піддаються математичному опису й аналізу. При цьому ступінь спрощення повинен бути таким, щоб всі істотні для даного економічного об'єкта риси відповідно до мети дослідження були включені в модель.

Важливим моментом *першого* етапу моделювання є чітке формулювання кінцевої мети побудови моделі, а також визначення критерію, згідно якого будуть порівнюватися різні варіанти розв'язку. В економічному аналізі такими критеріями можуть бути: найбільший прибуток, найменші витрати виробництва, максимальне завантаження устаткування, продуктивність праці та ін. Наприклад, необхідно проаналізувати програму виробництва продукції з метою виявлення резервів підвищення прибутку від впливу структурного зрушення в асортименті. Критерієм оптимальності в даному випадку при побудові економіко-математичної моделі виступає максимум прибутку. Рівняння цільової функції матиме вигляд:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j x_j \to max,$$

де $x_j$ – кількість виробленої продукції (т, шт., і т. д.) $j$-го виду; $\Pi_j$ – прибуток, отриманий від виробництва одиниці продукції $j$-го виду.

При постановці задач математичного програмування звичайно передбачається обмеженість ресурсів, які витрачаються при виробництві продукції. Тому важливо визначити, які ресурси є вирішальними для виробничого процесу й у той же час лімітуючими, яким є їхній запас. Якщо всі види виробничих ресурсів ( сировина, трудові ресурси, потужність устаткування та ін.) використовуються для випуску продукції, то необхідно знати витрати кожного виду ресурсу на одиницю продукції.

Усі обмеження, що описують економічний процес, мають бути сумісними, тобто повинен існувати хоча б один розв'язок задачі, що задовольняє всім обмеженням.

В якості обмежень при побудові економіко-математичної моделі виступає система нерівностей, яка має такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \omega_i, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

де $a_{ij}$ – норма витрат $i$-го виробничого ресурсу на виробництво одиниці $j$-го виду продукції; $\omega_i$ – запаси $i$-го виду виробничого ресурсу на період часу, що розглядається.

Поєднуючи рівняння цільової функції і систему обмежень у єдину модель, одержимо лінійну економіко-математичну модель асортиментної задачі:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \omega_i, \qquad i = 1, 2, ..., m; \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Не всяка економічна задача потребує власну модель. Деякі процеси з математичної точки зору однотипні і можуть описуватися однаковими моделями. Наприклад, у лінійному програмуванні, теорії масового обслуговування та інших існують типові моделі, до яких зводиться безліч конкретних задач.

*Другим* етапом моделювання економічних процесів є вибір раціонального математичного методу для розв'язку задачі. Наприклад, для розв'язку задач лінійного програмування відомо багато методів: симплексний, потенціалів та ін. Деталізація ускладнює побудову моделі, не дає переваг в аналізі економічних взаємозв'язків і не збагачує висновків. Натомість зайве укрупнення моделі призводить до втрати істотної економічної інформації, а іноді до неадекватного відображення реальних умов.

*Третім* етапом моделювання є всебічний аналіз отриманого результату. Остаточним критерієм достовірності та якості моделі є: практика, відповідність отриманих результатів і висновків реальним умовам виробництва, економічний зміст отриманих оцінок. Якщо результати не відповідають реальним виробничим умовам, то необхідно зробити економічний аналіз причин невідповідності. Це може бути і недостатня достовірність інформації, і невідповідність математичних методів і схем особливостям і економічного об'єкта, що досліджується. Після того, як причина визначена, в модель треба внести відповідні корективи, і повторити процес розв'язування задачі .

Таким чином, економіко-математичне моделювання роботи підприємства базується на аналізі його діяльності і, у свою чергу, збагачує цей аналіз результатами і висновками.

Побудова кінцевої факторної системи для економічного показника господарської діяльності, котрий аналізується, може здійснюватися як формальним, так і евристичним шляхом на основі якісного аналізу суті економічного явища. Моделювання факторної системи ґрунтується на таких економічних критеріях виділення факторів як елементів факторної системи: причинності, достатньої специфічності, самостійності існування, облікової можливості. У детермінованому моделюванні факторних систем можна виділити невелику кількість типів кінцевих факторних систем, що найчастіше зустрічаються в аналізі господарської діяльності:

1) адитивні моделі $y = \sum_{i=1}^{n} x_i = x + x_2 + ... + x_n$;

2) мультиплікативні моделі $y = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 ... x_n$;

3) кратні моделі $y = \frac{x_1}{x_2}$; $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{x_{n+1}}$; $y = \frac{x_1}{\sum_{i=2}^{n} x_i}$; $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}$.

За класом детермінованих факторних систем розрізняють такі основні прийоми моделювання.

1. Метод подовження факторної системи. Вихідна факторна система $y = \frac{a_1}{a_2}$. Якщо $a_1$ представити у вигляді суми окремих доданків-факторів $a_1 = a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n}$, то $y = \frac{a_{11}}{a_2} + \frac{a_{12}}{a_2} + ... + \frac{a_{1n}}{a_2}$ – кінцева факторна система вигляду $y = \sum x_i$ .

2. Метод розширення факторної системи. Вихідна факторна система $y = \frac{a_1}{a_2}$. Якщо і чисельник, і знаменник дробу "розширити” множенням на одне й те саме число, то одержимо нову факторну систему:

$$y = \frac{a_1 bcde...}{a_2 bcde...} = \frac{a_1}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{e}{a_2} \ ...,$$

тобто мультиплікативну модель вигляду $y = \prod x_i$ .

3. Метод скорочення факторної системи. Вихідна факторна система $y = \frac{a_1}{a_2}$. Якщо і чисельник, і знаменник дробу розділити на одне й те саме число, то одержимо нову факторну систему (з дотриманням правил виділення факторів):

$$y = \frac{\frac{a_1}{b}}{\frac{a_2}{b}} = \frac{a_{11}}{a_{21}} .$$

У даному випадку маємо кінцеву факторну систему вигляду $y = \frac{x_1}{x_2}$ .

Таким чином, складний процес формування рівня показника господарської діяльності, що досліджується, можна розкласти різними прийомами на його складові частини (фактори) і представити у вигляді детермінованої факторної системи.

Наприклад, при дослідженні процесу формування об’єму виробленої продукції – $y$, можна використовувати такі детерміновані факторні системи:

| У статиці (а) | У динаміці (б) |
|---|---|
| 1а. $y = x_1 \cdot x_2$, | 1б. $I_y = i_1 \cdot i_2$; |
| 2а. $y = x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$, | 2б. $I_y = i_1 \cdot i_3 \cdot i_4$; |
| 3а. $y = x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$, | 3б. $I_y = i_1 \cdot i_3 \cdot i_5 \cdot i_6 \cdot i_7$; |

де $y$ – об’єм продукції; $x_1$ – чисельність працюючих; $x_2$ – продуктивність праці одного працівника за період, що аналізується; $x_3$ – питома вага робітників у складі працюючих; $x_4$ – продуктивність праці одного робітника за період, що аналізується; $x_5$ – коефіцієнт використання робочих днів; $x_6$ – коефіцієнт використання робочого часу; $x_7$ – середня погодинна продуктивність праці одного робітника; $I_y$ – індекс зміни обсягу продукції; $i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$, $i_5$, $i_6$, $i_7$ – факторні індекси.

Моделі 1 – 3 описують процес послідовної деталізації впливу факторів на зміну обсягу продукції. Аналогічні моделі можна побудувати і для інших показників господарської діяльності.

Детерміноване моделювання факторних систем – це простий і ефективний засіб формалізації зв'язку економічних показників; воно є основою для кількісної оцінки ролі окремих факторів у динаміці зміни узагальнюючого показника.

Детерміноване моделювання факторних систем обмежене довжиною факторного поля прямих зв'язків. При недостатньому рівні знань про природу прямих зв'язків того чи іншого показника господарської діяльності часто є необхідним інший підхід до пізнання об'єктивної дійсності. Розмах кількісних змін економічних показників можна з'ясувати лише стохастичним аналізом масових емпіричних даних.

Стохастичний аналіз спрямовано на вивчення непрямих зв'язків ( опосередкованих факторів) у випадку неможливості визначення неперервного ланцюга прямого зв'язку. З цього випливає важливий висновок про співвідношення детермінованого і стохастичного аналізу: прямі зв'язки необхідно вивчати в першу чергу, а стохастичний аналіз носить допоміжний характер. Стохастичне моделювання факторних систем взаємозв'язків окремих сторін господарської діяльності спирається на узагальнення закономірностей варіювання значень економічних показників – кількісних характеристик факторів і результатів господарської діяльності. Таким чином, першою передумовою стохастичного моделювання є наявність сукупності спостережень, тобто можливість повторно виміріти параметри того самого явища в різних умовах.

При необхідності порівняння результатів діяльності окремих господарств чи одного господарства у часі може виникати лише питання про порівнянність виявлених кількісних аналітичних результатів. Це означає, . Отже, другою передумовою застосування стохастичного підходу моделювання зв'язків є якісна однорідність сукупності (щодо досліджуваних зв'язків).

Закон великих чисел говорить, що тільки у великій сукупності закономірний зв'язок виступає стійкіше за випадковий збіг напрямку варіювання. Тому третьою передумовою стохастичного аналізу є достатня розмірність (чисельність) сукупності спостережень, що дозволяє з достатньою надійністю і точністю виявити закономірності та зв'язки. Рівень надійності і точності моделі визначається практичними цілями використання моделі в управлінні виробничо-господарською діяльністю.

Четверта передумова стохастичного підходу – наявність методів, що дозволяють виявити кількісні параметри зв'язків економічних показників на основі масових даних вимірювань. Математичний апарат методів в цьому випадку висуває специфічні вимоги до фактичного даних. Виконання даних вимог є важливою передумовою застосування методів і достовірності отриманих результатів.

Основна особливість стохастичного факторного аналізу полягає в тому, що не можна складати модель шляхом якісного (теоретичного) аналізу, а необхідно застосовувати кількісний аналіз емпіричних даних.

В економічних дослідженнях знайшли застосування такі математико-статистичні методи стохастичного моделювання як оцінка зв'язку і кореляції між показниками; оцінка статистичної значущості зв'язків; регресійний аналіз; виявлення параметрів періодичних коливань економічних показників; групування багатомірних спостережень, дисперсійний аналіз.

Необхідність включення математико-статистичних методів у методику аналізу господарської діяльності підприємств залежить від значущості кількісних (статистичних) задач, які розв'язуються за допомогою даних методів.

Можна виділити такі найбільш типові класи задач в економічному аналізі:

- вивчення наявності, напрямку та інтенсивності зв'язку економічних показників;

- ранжування і класифікація факторів економічних явищ;
- виявлення аналітичної форми зв'язку між показниками;
- згладжування (побудова тренда) динаміки показників;
- виявлення параметрів періодичних коливань показників;
- ранжування і класифікація господарств (підприємств та їхніх підрозділів);
- вивчення розмірності (складності, багатогранності) економічних явищ;
- виявлення найбільш інформативних (узагальнюючих) синтетичних показників;
- вивчення внутрішньої структури зв'язків у системі економічних показників;
- порівняння структури зв'язків у різних сукупностях.

Найзагальнішою і найтиповішою статистичною задачею в економічному аналізі є вивчення наявності, напрямку та інтенсивності зв'язків між показниками. Припущення про наявність і тісноту зв'язку робиться у випадку виявлення загальних закономірностей у варіації значень показників, що досліджуються. Задача економічного аналізу – розкрити якісну основу взаємозв'язку між кількісними характеристиками економічних процесів. Вивчення зв'язку відбувається за допомогою методів кореляційного аналізу – коефіцієнтів і відношень кореляції. При цьому залежно від характеру вихідної інформації застосовуються різні прийоми кореляційного аналізу: оцінка парної кореляції між показниками з цифровою шкалою виміру; рангова кореляція і коефіцієнти, які розраховані за так званими матрицями спряженості для аналізу зв'язків між якісними показниками; канонічна кореляція для аналізу зв'язку між групами показників; парна кореляція, що дозволяє досліджувати зв'язок між двома показниками, елімінуючи вплив інших показників; множинна кореляція для оцінки залежності одного показника від групи показників.

Встановлення аналітичної форми зв'язку означає моделювання господарського процесу шляхом виявлення закономірностей формування значень результативного показника під впливом факторних показників. Це основна і найскладніша задача в економічному аналізі, котра при стохастичному підході розв’язується методом регресійного аналізу.

Вивчення інтенсивності та аналітичної форми зв'язків між показниками за допомогою методів кореляційного і регресійного аналізу дозволяє розв’язувати важливу статистичну задачу – ранжування і класифікацію факторів, що впливають на економічне явище. Можна виділяти суттєві та несуттєві для даного явища фактори, групи факторів, що дозволяють з достатньою точністю керувати економічними системами, а також ранжувати фактори за інтенсивністю їхнього впливу на явище чи процес.

Певний розвиток у практичних дослідженнях знайшли статистичні проблеми дослідження часових рядів. Часові ряди економічних показників мають у загальному випадку дві особливості – тенденція в зміні значень показників і періодичні коливання рівня економічних показників у часі Виникає специфічна задача виключення цих тенденцій з часових рядів. Для цього розроблено кілька методів. Після виключення тренда в залежності від характеру динаміки застосовуються методи аналізу динамічних процесів чи модифікацій відомих аналітичних прийомів.

Моделювання й аналіз періодичних коливань економічних показників мають велике значення в управління господарською діяльністю, зокрема на підприємствах із сезонним характером виробництва, у торгівлі тощо. Для моделювання періодичних коливань застосовуються методи спектрального і гармонійного аналізу. Такі дослідження дозволяють більш точно й обґрунтовано розробляти планові завдання

Класифікація і ранжування господарських об'єктів є важливою для виявлення класів однотипних підприємств з метою розробки загальних нормативів планування, оцінки, стимулювання і ранжування господарських об'єктів за результатами господарської діяльності давно впровадилися в економічний аналіз. Нові можливості підвищення якості розв’язування цих задач з'являються в результаті застосування методів групування багатомірних спостережень, дисперсійного аналізу, кластерного аналізу. З розвитком застосування методів факторного аналізу пов'язана також можливість ефективного розв'язку наступних трьох узагальнених статистичних задач економічного аналізу: вивчення внутрішньої структури зв'язків у системі показників, вивчення розмірності опису економічного явища, виявлення більш інформативних показників. Хоча ці задачі можна вирішити методами кореляційного і регресійного аналізу, проте при економічному аналізі їх варто вирішувати на основі методів факторного аналізу.

Виявлення за допомогою факторного аналізу синтетичних факторів, що описують основну інформацію про поведінку даної системи економічних показників, розв’язує проблему розмірності опису економічних явищ. Включення нових показників в аналіз доцільно тільки в тому випадку, якщо вони містять істотну додаткову інформацію про функціонування економічних систем, оскільки збір і обробка інформації для складання нових показників пов'язані з матеріальними і трудовими витратами.

Останньою узагальненою статистичною задачею в економічному аналізі є порівняння структури зв'язків у різних сукупностях. Порівняння можуть бути просторові та часові. При просторових порівняннях досліджуються інформаційна ємність різних систем показників і розбіжності в структурі зв'язків у різних сукупностях господарських об'єктів. Такі порівняння дозволяють оцінити можливість перенесення висновків, які зроблені на основі аналізу однієї сукупності, на інші сукупності, котрі є подібними першій за своєю внутрішньою структурою. Часові порівняння виявляють тенденції зміни структури зв'язків відповідно до розвитку економічного явища.

## 3.3 Методи аналізу кількісного впливу факторів на зміну результуючого показника

**Метод диференційного числення.** Теоретичною основою для кількісної оцінки ролі окремих факторів у динаміці результуючого показника є диференціювання.

Припускається, що загальний приріст функції (результуючого показника) розподіляється на доданки, де значення кожного з них визначається як добуток відповідної частинної похідної на приріст змінної, по якій обчислюється дана похідна. Розглянемо задачу знаходження впливу факторів на зміну результуючого показника на прикладі функцій двох змінних. Нехай задана функція $z = f(x, y)$; тоді, якщо функція є диференційованою, то її приріст можна виразити як

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

де $\Delta z = (z_1 - z_0)$ – зміна функції; $\Delta x = (x_1 - x_0)$ – зміна першого фактора; $\Delta y = (y_1 - y_0)$ – зміна другого фактора; $0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$ – нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Вплив факторів x та y на зміну z визначається в цьому випадку як

$$\Delta z_x = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x \qquad \text{та} \qquad \Delta z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y,$$

а їх сума є лінійною відносно приросту фактора частиною приросту функції. Зазначимо, що доданок $o\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ є малим при малих змінах факторів, і його значення можуть суттєво відрізнятися від нуля при великих змінах факторів. Оскільки цей метод дає однозначний розклад впливу факторів на зміну результуючого показника, то цей розклад може призвести до значних похибок в оцінці впливу факторів, оскільки в ньому не враховується величина залишкового члена, тобто $0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$.

Розглянемо використання методу на прикладі функції: $z = x{\cdot}y$. Нехай відомі початкові і кінцеві значення факторів і результуючого показника ($x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$) Тоді вплив факторів на зміну результуючого показника визначається формулами:

$$\Delta z_x = y_0\Delta x, \qquad \Delta z_y = x_0\Delta y.$$

Покажемо, що залишковий член в лінійному розкладі функції $z = x{\cdot}y$ дорівнює $\Delta x\Delta y$. Дійсно, загальна зміна функції склала $x_1y_1 - x_0y_0$, а різниця між загальною зміною $\Delta z_x + \Delta z_y$ і $\Delta z$ обчислюється за формулою

$$\Delta z - \Delta z_x - \Delta z_y = (x_1y_1 - x_0y_0) - y_0\Delta x - x_0\Delta y = (x_1y_1 - x_0y_0) - y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0) =$$
$$= (x_1y_1 - x_1y_0) - (x_0y_1 - x_0y_0) = x_1(y_1 - y_0) - x_0(y_1 - y_0) = (y_1 - y_0)(x_1 - x_0) = \Delta x\Delta y.$$

Таким чином, в методі диференційного числення так званий нерозкладний залишок, який інтерпретується як помилка метода диференціювання, просто відкидається. В цьому полягає ”незручність” диференціювання для економічних розрахунків, в яких, як правило, потрібен точний баланс зміни результуючого показника і алгебраїчної суми впливу всіх факторів.

**Індексний метод визначення впливу факторів на узагальнюючий показник.** В статистиці, плануванні і аналізі господарчої діяльності основою для кількісної оцінки ролі окремих факторів в динаміці узагальнюючих показників є індексні методи.

Зокрема, при виченні залежності об’єму випуску продукції на підприємстві від зміни чисельності працівників і продуктивності їх праці, можна використовувати таку систему взаємопов’язаних індексів:

$$I^N = \frac{\sum D_1R_1}{\sum D_0R_0}, \quad (1)$$

$$I^N = \frac{\sum D_0R_1}{\sum D_0R_0} \cdot \frac{\sum D_1R_1}{\sum D_0R_1}, \quad (2)$$

$$I^N = I^N \cdot I^D \quad (3)$$

де $I^N$ – загальний індекс зміни об’єму випуску продукції; $I^R$ – індивідуальний (факторний) індекс зміни чисельності працівників; $I^D$ – факторний індекс зміни продуктивності праці ; $D_0, D_1$ – середньорічна величина виробництва товарної (валової) продукції на одного працівника в базисному і звітному періодах відповідно; $R_0, R_1$ – середньорічна чисельність промислово-виробничого персоналу відповідно в базисному і звітному періодах.

Наведені формули показують, що загальна відносна зміна об’єму випуску продукції утворюється як добуток відносних змін двох факторів: чисельності працівників і продуктивності їх праці. Формули відображають прийняту в статистиці практику побудови факторних індексів, зміст як можна сформулювати таким чином.

Якщо узагальнюючий економічний показник є добутком кількісного і якісного показників-факторів, то при визначенні впливу кількісного фактора якісний показник фіксується на базисному рівні, а при визначені впливу якісного фактора кількісний показник фіксується на рівні звітного періоду.

**Метод ланцюгових підстановок.** Цей метод полягає в отриманні низки проміжних значень узагальнюючого показника шляхом послідовної заміни базисних значень факторів на фактичні. Різниця двох проміжних значень узагальнюючого показника в ланцюгу підстановок дорівнює зміні узагальнюючого показника, що викликана зміною відповідного фактора.

У загальному вигляді маємо таку систему обчислень за методом ланцюгових підстановок:

$y_0 = f(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots)$ – базисне значення узагальнюючого показника;
$y_a = f(a_1, b_0, c_0, d_0, \ldots)$ – перше проміжне значення;
$y_b = f(a_1, b_1, c_0, d_0, \ldots)$ – друге проміжне значення;
$y_c = f(a_1, b_1, c_1, d_0, \ldots)$ – третє проміжне значення;
…………………………………………….
$y_1 = f(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots)$ – фактичне значення.

Загальне абсолютне відхилення узагальнюючого показника визначається за формулою

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots) - f(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots).$$

Загальне абсолютне відхилення узагальнюючого показника розкладається на фактори:
за рахунок зміни фактора *a*

$$\Delta y_a = y_a - y_0 = f(a_1, b_0, c_0, d_0, \ldots) - f(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots),$$

за рахунок зміни фактора *b*

$$\Delta y_b = y_b - y_a = f(a_1, b_1, c_0, d_0, \ldots) - f(a_1, b_0, c_0, d_0, \ldots),$$

і так далі.

Метод ланцюгових підстановок, має недоліки, про які слід знати при його застосуванні. По-перше, результати обчислень залежать від послідовності заміни факторів; по-друге, активна роль в зміні узагальнюючого показника необґрунтовано часто приписується якісному фактору.

Наприклад, якщо показник $z$, має вигляд $z = f(x, y) = x \cdot y$, то його зміна за період $\Delta t = t_1 - t_0$ виражається формулою

$$\Delta z = x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y,$$

де $\Delta z$ – приріст узагальнюючого показника; $\Delta x, \Delta y$ – прирости факторів; $x_0, y_0$ – базисне значення факторів; $t_0, t_1$ – відповідно базисний і звітний період часу.

Групуючи в цій формулі останній доданок з одним із перших, одержуємо два різних варіанти ланцюгових підстановок.

Перший варіант:

$$\Delta z = (x_0 + \Delta x)\Delta y + y_0 \Delta x = x_1 \Delta y + y_0 \Delta x.$$

Другий варіант:

$$\Delta z = x_0 \Delta y + (y_0 + \Delta y)\Delta x = x_0 \Delta y + y_1 \Delta x.$$

На практиці звичайно використовується перший варіант за умови, що $x$ – кількісний фактор, а $y$ – якісний.

У цій формулі обчислюється вплив якісного фактора на зміну узагальненого показника, тобто, вираз $(x_0 + \Delta x)\Delta y$ є більш активним, оскільки його величина встановлюється добутком приросту якісного фактора на фактичне значення кількісного фактора. Тим самим приріст узагальнюючого показника за рахунок спільної зміни факторів приписується впливу тільки якісного фактора.

Отже задача точного визначення ролі кожного фактора в зміні узагальнюючого показника методом ланцюгових підстановок не розв'язується.

В зв'язку з цим особливу актуальність набуває пошук шляхів вдосконалення точного однозначного визначення ролі окремих факторів в умовах випровадження в економічному аналізі складних економіко-математичних моделей факторних систем.

**Метод простого додавання нерозкладного залишку.** Не знаходячи достатньо повного обґрунтування, що робити з залишком, в практиці економічного аналізу стали використовувати прийом додавання нерозкладного залишку до якісного або кількісного (загального або похідного) фактора, а також ділити цей залишок між двома факторами порівну.

Перший варіант додавання нерозкладного залишку:

$$\Delta_x z = y_0 \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y = (y_0 + \Delta y)\Delta x = y_1 \Delta x; \qquad \Delta_y z = x_0 \Delta y.$$

Другий варіант додавання нерозкладного залишку:

$$\Delta_x z = y_0 \Delta x; \qquad \Delta_y z = x_0 \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y = (x_0 + \Delta x)\Delta y = x_1 \Delta y.$$

Третій варіант додавання нерозкладного залишку:

$$\Delta_x z = y_0 \Delta x + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}; \qquad \Delta_y z = x_0 \Delta y + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}.$$

**Метод зважених кінцевих різниць.** Цей метод полягає в тому, що величина впливу кожного фактора визначається як за першим, так і за другим порядком підстановки, потім результат підсумовується і від отриманої суми береться середня величина, яка дає єдину відповідь про значення впливу фактора. Якщо в розрахунках приймає участь більша кількість факторів, то їх значення обчислюються по всім можливим варіантам підстановок.

Опишемо цей метод математично, використовуючи позначення, які прийняті вище.

$$\Delta z'_x = x_1 \cdot y_1 - x_0 \cdot y_1 = y_1(x_1 - x_0), \qquad \Delta z''_x = x_1 \cdot y_0 - x_0 \cdot y_0 = y_0(x_1 - x_0),$$

$$\Delta \bar{z}_x = \frac{\Delta z'_x + \Delta z''_x}{2};$$

$$\Delta z'_y = x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_0 = x_1(y_1 - y_0), \qquad \Delta z''_y = x_0 \cdot y_1 - x_0 \cdot y_0 = x_0(y_1 - y_0),$$

$$\Delta \bar{z}_y = \frac{\Delta z'_y + \Delta z''_y}{2}.$$

Отже метод зважених кінцевих різниць враховує всі варіанти підстановок. Одночасно при усередненні не можна отримати однозначне кількісне значення окремих факторів. Цей метод є вельми трудомістким, оскільки доводиться перебирати всі можливі варіанти підстановок. В своїй основі метод зважених кінцевих різниць є ідентичним (тільки для двофакторної мультиплікативної моделі) методу простого додавання нерозкладного залишку при діленні цього залишку між факторами порівну. Це підтверджується наступним перетворенням формули

$$\Delta\bar{z}_x = \frac{y_1\Delta x + y_0\Delta x}{2} = \frac{\Delta x\left(y_1 - y_0\right)}{2} = \frac{\Delta x\left(y_0 + y + y_1\right)}{2} = y_0\Delta x + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}.$$

Аналогічно

$$\Delta\bar{z}_x = x_0\Delta y + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2}.$$

**Логарифмічний метод.** Цей метод полягає в тому, що досягається логарифмічно пропорційний розподіл залишку по двом факторам. У цьому випадку послідовності дії факторів не має значення.

Математично цей метод описується таким чином.

Факторну систему $z = x{\cdot}y$ можна представити у вигляді $\lg z = \lg x + \lg y$, тоді

$$\Delta\lg z = \lg z_1 - \lg z_0 = (\lg x_1 - \lg x_0) + (\lg y_1 - \lg y_0),$$

або

$$\lg\frac{z_1}{z_0} = \lg\frac{x_1}{x_0} + \lg\frac{y_1}{y_0},$$

де $\lg z_1 = \lg x_1 + \lg y_1$; $\lg z_0 = \lg x_0 + \lg y_0$.

Поділивши обидві частини формули на $\lg\frac{z_1}{z_0}$ і помноживши на $\Delta z$, одержимо:

$$\Delta z = \frac{\Delta z\lg\frac{x_1}{x_0}}{\lg\frac{z_1}{z_0}} + \frac{\Delta z\lg\frac{y_1}{y_0}}{\lg\frac{z_1}{z_0}}, \qquad (4)$$

або

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z = k\lg\frac{x_1}{x_0} + k\lg\frac{y_1}{y_0},$$

де $k = \frac{\Delta z}{\lg\frac{z_1}{z_0}}$ або $k = \frac{\Delta z}{\lg z_1 - \lg z_0}$.

Вираз (4) для $\Delta z$ є його логарифмічним пропорційним розподілом по двох факторам. Тому такий підхід назвали ”логарифмічним методом розкладу приросту $\Delta z$ на фактори”. Особливість методу полягає в тому, що він дозволяє визначити беззалишковий вплив будь-якої чисельності ізольованих факторів на зміну результуючого показника без встановлення послідовності дій.

У більш загальному вигляді у випадку наявності великого кількості множників в мультиплікативній моделі факторної системи, що аналізується (наприклад, $z = x{\cdot}y{\cdot}p{\cdot}q$), сумарний приріст результуючого показника $\Delta z$ складатиме:

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_p z + \Delta_q z = k\lg\frac{x_1}{x_0} + k\lg\frac{y_1}{y_0} + k\lg\frac{p_1}{p_0} + k\lg\frac{q_1}{q_0}.$$

Розклад приросту на фактори досягається за рахунок введення коефіцієнта $k$, який у випадку рівності нулю або взаємного погашення дії факторів не дозволяє використовувати вказаний метод. Формулу (4) для $\Delta z$ можна записати інакше:

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z = \Delta z K_x + \Delta z K_y, \qquad (5)$$

де $K_x = \frac{\lg\frac{x_1}{x_0}}{\lg\frac{z_1}{z_0}}$; $K_y = \frac{\lg\frac{y_1}{y_0}}{\lg\frac{z_1}{z_0}}$.

З цієї формули випливає, що загальний приріст результуючого показника розподіляється за факторами пропорційно відношенню логарифмів факторів до логарифму результуючого показника. При цьому можна використовувати логарифм за будь-якою основою.

Головним недоліком логарифмічного метода аналізу є те, що він не може бути ”універсальним”, його не можна застосовувати при аналізі довільного вигляду моделей факторних систем. Якщо при аналізі мультиплікативних моделей факторних систем при використанні логарифмічного методу отримуємо точні величини впливу факторів (у випадку, коли $\Delta z \neq 0$), то при такому ж аналізі кратних моделей факторних систем цього зробити не можна.

Так, якщо кратну модель факторної системи представити у вигляді

$$z = \frac{x}{y} = xy^{-1}, \quad \text{то} \qquad \lg \frac{y_1^{-1}}{y_2^{-1}} = \lg \frac{y_0}{y_1},$$

тоді формулу, аналогічну (5), можна застосувати для аналізу кратних моделей факторних систем, тобто

$$\Delta z = \Delta z'_x + \Delta z'_y = \Delta z K'_x + \Delta z K'_y,$$

де $K'_x = \dfrac{\lg \dfrac{x_1}{x_0}}{\lg \dfrac{z_1}{z_0}}$; $\qquad K'_y = \dfrac{\lg \dfrac{y_0}{y_1}}{\lg \dfrac{z_1}{z_0}}$.

Якщо в кратній моделі факторної системи $z = \dfrac{x}{y}$, $y = p + q$, то при аналізі цієї моделі одержимо:

$$\Delta z = z_1 - z_0 = \Delta_x z + \Delta_y z = \Delta_x z + \Delta_p z + \Delta_q z;$$

$$\Delta_x z = \Delta z K_x = \Delta z \frac{\lg \dfrac{x_1}{x_0}}{\lg \dfrac{z_1}{z_0}},$$

$$\Delta_y z = \Delta z - \Delta_x z$$

$$\Delta_p z = \Delta_y z \cdot L = \Delta_y z \frac{p_1 - p_0}{(p_1 + q_1) - (p_0 + q_0)} = \Delta_y z \frac{\Delta p}{\Delta y}.$$

$$\Delta_q z = \Delta_y z - \Delta_p z.$$

Варто зауважити, що наступна розбивка фактора $\Delta'_y z$ методом логарифмування на фактори $\Delta'_p z$ і $\Delta'_q z$ здійснити на практиці не вдається. Саме в цьому і полягає недолік описаного методу. Застосування ”змішаного” підходу в аналізі кратних моделей факторних систем не розв’язує проблеми отримання ізольованого значення із всього набору факторів, які впливають на зміну результуючого показника. Наявність наближених обчислень величин факторних змін доводить недосконалість логарифмічного методу аналізу.

**Метод дроблення приростів факторів.** Подальшим розвиненням методу диференціального числення є метод дроблення приростів факторних ознак, при якому проводимо розбиття приростів кожної із змінних на достатньо малі відрізки і виконуємо обчислення значень частинних похідних при кожному (вже достатньо малому) переміщенні в просторі. Степінь розбиття приймається такою, щоб сумарна похибка не впливала на точність економічних обчислень.

Звідси приріст функції $z = f(x, y)$ можна представити в загальному вигляді так

$$\Delta z = \Delta' x \sum_{i=0}^{n-1} f'_x(x_0 + i\Delta' x, y_0 + i\Delta' y) + \Delta' y \sum_{i=0}^{n-1} f'_y(x_0 + i\Delta' x, y_0 + i\Delta' y) + \varepsilon;$$

$$\Delta' x = \frac{x_1 - x_0}{n}, \qquad \Delta' y = \frac{y_1 - y_0}{n},$$

де $n$ – кількість відрізків, на які розбивається приріст кожного фактора;

$A_x^n = \Delta' x \sum_{i=0}^{n-1} f_x'(x_0 + i\Delta' x, y_0 + i\Delta' y)$ – зміна функції $z = f(x, y)$ внаслідок зміни фактора $x$ на величину $\Delta x = x_1 - x_0$; $A_y^n = \Delta' y \sum_{i=0}^{n-1} f_y'(x_0 + i\Delta' x, y_0 + i\Delta' y)$ – зміна функції $z = f(x, y)$ внаслідок зміни фактора $y$ на величину $\Delta y = y_1 - y_0$.

Похибка **ε** зменшується із зростанням ***n***.

Метод дроблення приростів факторних ознак має деякі переваги перед методом ланцюгових підстановок. Він дозволяє визначити однозначно величину впливу факторів при заданій точності обчислень, він не пов'язаний з послідовністю підстановок і вибором якісних і кількісних показників факторів. Метод дроблення потребує виконання умов диференційованості функції в області, що розглядається.

**Інтегральний метод оцінки факторних впливів.** Розглянемо інтегральний метод факторного аналізу, який є подальшим логічним продовженням метода дроблення приростів факторних ознак. Цей метод полягає в обчисленні суми приростів функції, яка визначена як добуток частинної похідної та приросту аргументу на нескінченно малих проміжках. При цьому повинні виконуватися такі умови:

1) неперервна диференційованість функції, де в якості аргументу використовується економічний показник;
2) функція між початковою і кінцевою точками елементарного періоду змінюється по прямій $\Gamma_\varepsilon$;
3) постійне співвідношення швидкостей зміни факторів

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \text{const.}$$

У загальному вигляді формули для визначення кількісних величин впливу факторів на зміну результуючого показника (для функції $z = f(x, y)$ – будь-якого вигляду) виводяться так:

$$A_x^\infty = \lim_{n\to\infty} A_x^\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f_x'(x_0 + i\Delta' x, y_0 + \Delta' y)\Delta' x = \int_{\Gamma_\varepsilon} f_x' dx,$$

$$A_y^\infty = \lim_{n\to\infty} A_y^\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f_y'(x_0 + i\Delta' x, y_0 + \Delta' y)\Delta' y = \int_{\Gamma} f_y' dy,$$

де $\Gamma_\varepsilon$ – прямолінійний орієнтований відрізок на площині $(x, y)$, що з'єднує точку $(x_o, y_o)$ з точкою $(x_1, y_1)$.

У реальних економічних процесах зміна факторів в області визначення функції може відбуватися не по прямолінійному відрізку $\Gamma_\varepsilon$, а по деякій орієнтованій кривій Г. Але оскільки зміна факторів розглядається за елементарний період (тобто за мінімальний відрізок часу, протягом якого хоча б один із факторів отримає приріст), то траєкторія Г визначається єдиним можливим способом – прямолінійним орієнтованим відрізком $\Gamma_\varepsilon$, який з'єднує початкову і кінцеву точки періоду.

Виведемо формулу для загального випадку.

Нехай задано функцію зміни результуючого показника від факторів

$$y = f(x_1, \ldots, x_m),$$

де $x_j$ – значення факторів, $j = 1, 2, \ldots, m$; $y$ – значення результуючого показника.

Фактори змінюються в часі, відомі значення кожного фактора в $n$ точках, тобто будемо вважати, що в $m$ – вимірному просторі задано $n$ точок:

$$M_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1),\ M_2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2),\ \ldots,\qquad M_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n),$$

де $x_j^i$ – значення $j$-го показника в момент $i$.

Точки $M_1$ і $M_n$ відповідають значенням факторів на початку і в кінці періоду.

Припустимо, що показник $\boldsymbol{y}$ отримав за весь період приріст $\Delta y$ нехай функція $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ диференціюється і $y = f_{x_j}'(x_1, \ldots, x_m)$ – частинна похідна цієї функції по аргументу $x_j$.

Припустимо, що $L^i$ – це відрізок прямої, що з'єднує дві точки $M^i$ та $M^{i+1}$ ($i = 1, 2, ..., n - 1$). Тоді параметричне рівняння прямої можна записати у вигляді:

$$x_j = x_j^i + (x_j^{i+1} - x_j^i)t\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m; \qquad 0 \le t \le 1.$$

Введемо позначення

$$\Delta y_j^i = \int\limits_L f'_{x_j}(x_1, x_2, ..., x_m)dx_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Беручи до уваги дві останні формули, можемо записати інтеграл по відрізку $L^i$:

$$\Delta y_j^i = \int\limits_0^1 f'_{x_j}[x_1^i + (x_1^{i+1} - x_1^i)t, x_2^i + (x_2^{i+1} - x_2^i)t, ..., x_m^i(x_m^{i+1} - x_m^i)t](x_j^{i+1} - x_j^i)dt$$

де $\quad j = 1, 2, \ldots, m; \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$

Обчисливши всі інтеграли, отримаємо матрицю

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1^1 & \Delta y_2^1 & \ldots & \Delta y_j^1 & \ldots & \Delta y_m^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta y_1^{(n-1)} & \Delta y_2^{(n-1)} & \ldots & \Delta y_j^{(n-1)} & \ldots & \Delta y_m^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Елемент цієї матриці $\Delta y_j^i$ характеризує вклад $j$-го показника в зміну результуючого показника за період $i$.

Просумувавши значення $\Delta y_j^i$ за стовпчиками матриці отримаємо наступний рядок:

$$(\Delta y_1, \Delta y_2, ..., \Delta y_j, ..., \Delta y_m),$$

$$(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_1^i, \sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_2^i, ..., \sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_j^i, ..., \sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_m^i)\,.$$

Значення будь-якого $j$-го елемента цього рядка характеризує вклад $j$-го фактора у зміну результуючого показника $\Delta y$. Сума всіх $\Delta y_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) є сумою всіх приростів результуючого показника.

Можна виділити два напрямки практичного використання інтегрального методу при розв'язуванні задач факторного аналізу.

До першого можна віднести задачі факторного аналізу, коли відсутні дані про зміну факторів всередині періоду або ж від них можна абстрагуватися, і тоді цей період розглядається як елементарний. У такому випадку розрахунки потрібно вести по орієнтованій прямій $\Gamma_\varepsilon$. Цей тип задач факторного аналізу можна умовно називати статичним. Співвимірювання приростів факторів відбувається по відношенню до одного фактора, який обраний для цієї мети.

До статичних типів задач інтегрального методу факторного аналізу слід віднести розрахунки, що пов'язані з аналізом виконання плану або динаміки (при порівнянні з попереднім періодом) показників. У цьому випадку відсутні дані про зміну факторів всередині періоду, що аналізується.

До другого напрямку можна віднести задачі факторного аналізу, коли маємо інформацію про зміну факторів всередині періоду і її потрібно врахувати. У цьому випадку, період відповідно до даних розбивається на ряд елементарних. При цьому обчислення потрібно проводити по деякій орієнтованій кривій Г, що з'єднує точку ($x_o, y_o$) з точкою ($x_1, y_1$) для двофакторної моделі. Задача полягає у визначенні вигляду кривої Г, по якій проходив рух у часі факторів $x$ та $y$. Цей тип задач факторного аналізу можна умовно назвати динамічними, оскільки фактори, що беруться до уваги при аналізі, змінюються на кожному відрізку періоду.

До динамічного типу задач інтегрального методу слід віднести розрахунки, які пов'язані з аналізом часових рядів економічних показників. У цьому випадку можна підібрати, хоча й наближено, рівняння, що описує поведінку факторів у часі за весь період, що розглядається.

Порівнянно з іншими методами інтегральний метод факторного аналізу дає однозначну оцінку впливу факторів і дозволяє отримати найбільш точний результат. Результати обчислень по інтегральному методу значно відрізняються від того, що дає метод ланцюгових підстановок або модифікації останнього. Чим більше величина зміни факторів, тим більшою є відмінність.

Метод ланцюгових підстановок (його модифікації) в своїй основі враховують співвідношення величин факторів, що вимірюються. Чим більшим є розрив між величинами приростів факторів, що входять в модель факторної системи, тим сильніше реагує на це інтегральний метод факторного аналізу.

На відміну від ланцюгового методу в інтегральному методі діє логарифмічний закон перерозподілу факторних навантажень, що свідчить про його переваги. Цей метод є об'єктивним, оскільки виключає будь-які припущення про роль факторів до проведення аналізу. На відміну від інших методів факторного аналізу інтегральний метод дотримується положення про незалежність факторів.

Важливою особливістю інтегрального методу факторного аналізу є його універсальність, він дає загальний підхід до розв'язання найрізноманітніших задач незалежно від кількості елементів, що входять в модель факторної системи, і форми зв'язку між ними.

## 3.4. Методи комплексної оцінки господарчо-фінансової діяльності

**Поняття комплексної оцінки.** Комплексна оцінка господарчої діяльності є результатом комплексного дослідження, тобто одночасного вивчення сукупності показників, які відображають всі аспекти господарчих процесів, і такою, що включає загальні висновки про результати діяльності об'єкту на основі виявлення якісних і кількісних відмінностей від бази порівняння (плану, нормативів, попередніх періодів, досягнень на інших аналогічних об'єктах, інших можливих варіантах розвитку).

Для того, щоб комплексна оцінка була дієвим засобом господарчого управління, необхідно розвивати практичні методи її конструювання, які можна було б використовувати у щоденній роботі економістів-аналітиків.

Комплексна оцінка дає можливість провести порівняльне оцінювання комерційної діяльності деякої множини однорідних підприємств та їх підрозділів за визначеною сукупністю економічних та технічних індикаторів.

При збільшенні кількості об'єктів і особливо показників-критеріїв оцінки розв'язування задачі ускладнюється. Теоретично звідси впливає, що потрібно оцінювати досягнення підприємств або їх підрозділів за деяким одним показником, який синтезує всі аспекти діяльності цього об'єкту. Однак складність виробничо-господарської діяльності не дозволяє виділити із числа загальних результативних показників один в якості основного.

Необхідність порівняльної комплексної оцінки господарської діяльності виникає, як правило, у двох випадках.

По-перше, коли потрібно зіставити роботу декількох господарських об'єктів за наявними даними про їх діяльність на основі єдиної системи показників, тобто необхідно провести оцінку роботи, розрахувавши для кожного з них інтегральний оцінювальний показник, за допомогою якого можна було б встановити степінь (відносну) успішності їх роботи.

По-друге, комплексна оцінка використовується для порівняння результатів господарської діяльності будь-якого господарського об'єкта в часі. В результаті знаходимо деяку узагальнену інтегральну оцінку (показник), яка дає кількісну та якісну характеристику динаміки розвитку об'єкта в часі.

Ці дві умови значною мірою суперечать одна одній. Так, забезпечення можливості зіставляти показники вимагає використання формальних (математичних) процедур, які не завжди зрозумілі користувачам. Вимога простоти від процедури підведення підсумків примушує використовувати такі методи оцінки, при яких виникає неявне ранжування показників за мірою їх значущості або, як у випадку метода суми місць (що описується нижче), незначна варіація окремого показника може вагомо вплинути на кінцевий результат оцінки.

Крім того, важливою умовою використання методів порівняльної комплексної оцінки є узгодження про можливу порівнянність різних за змістом показників. Так, в систему оціночних показників можуть входити вартісні, трудові, натуральні та інші показники. Тому необхідно так організувати процедуру оцінки результатів господарської діяльності, щоб індивідуальні властивості окремих показників не впливали на кінцеву оцінку, тобто зіставлення має проводитись не за абсолютними значеннями показників, а на основі їх відносних варіацій (див. таксонометричний метод).

**Постановка задачі комплексної оцінки результатів господарської діяльності.** В якості прикладу побудови комплексної оцінки розглянемо підведення підсумків господарчої діяльності.

На підприємстві підводять підсумки за місяць за такими показниками бізнес-плану: випуск реалізованої продукції, випуск товарної продукції, груповий асортимент, економія фонду заробітної плати (в процентах до попереднього періоду), співвідношення росту продуктивності праці та фонду заробітної плати в процентах порівнянно з відповідним періодом минулого року, собівартість продукції, ритмічність. Зауважимо, що система показників оцінки диктується конкретними умовами виробництва.

Для отримання узагальнюючих комплексних оцінок можна застосовувати різні методи зведення різних показників в єдиний інтегральний показник.

Зведення ряду показників в єдиний інтегральний показник дозволяє визначити відмінність досягнутого стану від бази порівняння в цілому по групі вибраних показників і, хоча це і не дає можливості змінити ступінь відмінності, проте дозволяє зробити однозначний висновок про покращення (погіршення) результатів роботи за даний проміжок часу. Проте, побудова інтегрального показника не означає, що для оцінки використовується тільки він один. Навпаки, інтегральний показник допускає дослідження системи показників, що лежать в основі оцінки, а висновки, що отримані лише на основі інтегрального показника, носять лише орієнтовний характер, виконують допоміжну роль визначення характеру змін в результатах господарчої діяльності в цілому за всіма показниками. І саме тому, що інтегральний показник дає суттєву додаткову інформацію для об'єктивної оцінки результатів діяльності виробничого об'єкту, необхідно розробляти і вдосконалювати методи побудови інтегрального показника. Нижче наведено декілька таких методів, що успішно використовуються при підведенні підсумків роботи колективу та його структурних підрозділів.

**Методи детермінованої комплексної оцінки.** До методів порівняльної комплексної оцінки відносять такі: метод сум, метод суми місць, метод суми балів, метод коефіцієнтів, метод відстаней та таксонометричний метод.

Вихідною інформацією при їх використанні слугує таблиця, елементами якої є значення показників. Нехай маємо $m$ об'єктів і $n$ показників, за якими проводиться оцінка. Кожний $j$-й показник на $i$-му об'єкті задається величиною $x_{ij}$. Тобто, задана матриця $X$, рядки якої характеризують роботу окремого об'єкта за $n$ різними показниками.

До вихідної матриці $X$ можуть додаватися ще два рядки. Перший характеризує значущість показника при підведенні комплексної оцінки, тобто вводиться ранжування показників за ступенем їх значущості. Ці оцінки є числами, що враховуються в той чи інший спосіб. Припустимо, що значущість показників задана вектором $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Якщо значущість всіх показників однакова, то припустимо, що $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$.

Множина оціночних показників може включати показники-стимулятори, збільшення яких покращує загальну оцінку роботи об'єкта (наприклад, випуск продукції, продуктивність праці і т. д.) і показники-дестимулятори, збільшення яких погіршує загальну оцінку роботи об'єкта (собівартість, штрафи, брак тощо). У зв'язку з цим до матриці $X$ додається інший рядок, елементи якого $s_j$ приймають значення або (– 1), якщо $j$-й показник – дестимулятор, або (+ 1), якщо $j$-й показник – стимулятор.

Таким чином, вихідними даними для розрахунків слугує матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

і два вектори:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n), \qquad (s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

На цьому закінчується загальна частина постановки задачі за усіма методами комплексної оцінки. Далі опишемо методику кожного метода окремо.

Відповідно до *методу сум* інтегральний показник комплексної оцінки визначається як сума фактичних значень, або ж обчислюється для кожного виробничого об'єкту за формулою

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}^{\phi}}{x_{ij}^{\sigma}},$$

де $x_{ij}^{ф}$, $x_{ij}^{б}$ – відповідно, фактичне і базове значення *j*-го показника на *і*-му виробничому об’єкті; $j = 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$.

Критерій оцінки найкращого підрозділу: $max\ K_i$ $(1 \le i \le m)$.

Необхідною умовою правильного обчислення інтегрального показника, який отримано за цією формулою, є однонаправленість досліджуваних показників, тобто збільшення (зменшення) значення будь-якого частинного показника розцінюється як покращення результатів господарської діяльності, а відповідно зменшення (збільшення) значення частинного показника – як погіршення результатів діяльності виробничого об’єкту. Однонаправленість окремих показників дозволяє ранжувати виробничі об’єкти за зростанням (спаданням) значень інтегрального показника.

Оцінка результатів господарської діяльності за методом сум може бути побудована за різними показниками і не лише в порівнянні з планом, але й попередніми періодами (оцінка динаміки) і з еталонними значеннями показників по групі виробничих об’єктів.

Недоліком методу сум є можливість завищування оцінки результатів за інтегральним показником при значному відставанні за будь-яким окремим показником, яке покривається за рахунок високих досягнень по інших показниках. Певною мірою цей недолік можна ліквідувати, якщо поряд з загальним інтегральним показником обчислювати два додаткових показники, які окремо відображають суму позитивних і суму негативних відхилень значень частинних показників від бази порівняння:

$$K_i^+ = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^+ ;$$

$$K_i^- = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^- , \qquad i = 1, ..., m,$$

де

$$x_{ij}^+ = \begin{cases} \dfrac{x_{ij}^{ф}}{x_{ij}^{б}}, & якщо \quad x_{ij}^{ф} > x_{ij}^{б}, \\ 0, & якщо \quad x_{ij}^{ф} < x_{ij}^{б}; \end{cases}$$

$$x_{ij}^- = \begin{cases} \dfrac{x_{ij}^{б}}{x_{ij}^{ф}}, & якщо \quad x_{ij}^{ф} < x_{ij}^{б}, \\ 0, & якщо \quad x_{ij}^{ф} > x_{ij}^{б}. \end{cases}$$

*Метод геометричної середньої* передбачає обчислення коефіцієнтів $a_{ij}$ для оцінюваних показників таких, що $0 \le a_{ij} \le 1$. За одиницю приймають значення, яке відповідає найбільш високому рівню даного показника.

Узагальнююча оцінка отримується у вигляді коефіцієнта:

$$K_i = \left[ \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \right]^{\frac{1}{n}}, \qquad i = 1, ..., m.$$

Цей метод доцільно застосовувати при відносно малій кількості оцінюваних показників і у випадку, коли більшість їх значень близька до одиниці.

У деяких випадках застосовується *метод коефіцієнтів*, коли оцінка отримується як добуток відповідних коефіцієнтів:

$$K_i = \prod_{j=1}^{n} a_{ij} , \qquad i = 1, ..., m.$$

Цей метод практично не відрізняється від метода середньої геометричної. Критерій оцінки найкращого підрозділу: $max\ K_i$ $(1 \le i \le m)$.

*Метод суми місць.* За вихідними даними (за матрицею $X$ та вектором $s$) будується допоміжна матриця $P$ згідно з такими правилами:

а) при $s_i = +1$ елементи стовпця $j$ матриці $X$ впорядковуються за спаданням і елементу $p_{ij}$ присвоюється значення, що відповідає місцю елемента $x_{ij}$ серед впорядкованих елементів *j*-го стовпчика;

б) при $s_i = -1$ елементи стовпця $j$ матриці $X$ впорядковуються за зростанням і елементу $p_{ij}$ присвоюється значення, що відповідає місцю елемента $x_{ij}$ серед впорядкованих елементів $j$-го стовпчика.

Таким чином, за кожним $j$-им показником об'єкти впорядковуються за його значеннями. Оцінка $K_i$ кожного підрозділу $i$ обчислюється за формулою

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \qquad (i = \overline{1, m}).$$

Критерій оцінки найкращого підрозділу: $min\ K_i$ $(1 \le i \le m)$.

*Метод суми балів* передбачає попереднє ранжування всіх виробничих підрозділів аналогічним чином, як у методі суми місць. Тобто, кожному показнику відповідає новий параметр $p_{ij}$, який визначає місце кожного серед інших за $j$-м показником.

На основі цієї матриці обчислюється узагальнююча оцінка:

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot a_{ij}, \qquad i = 1, ..., m.$$

Критерій оцінки найкращого підрозділу: $min\ K_i$ $(1 \le i \le m)$.

Основою *метода відстаней* є врахування близькості об'єктів за відносними показниками до об'єкту-еталону.

У даному методі, окрім інформації про показники ($x$), щодо коефіцієнтів порівняльної значущості показників ($k_1, k_2, \ldots, k_n$) і характеристик напрямків дії показників ($s_1, s_2, \ldots, s_n$), потрібно визначити за наявною інформацією підрозділ-еталон. Цей віртуальний підрозділ має найкращі значення по кожному підрозділу серед всіх наявних. Показники підрозділу-еталона $x_{0j}$ будуються так:

$$x_{0j} = max\ x_{ij}\ (1 \le i \le m) \text{ при } s_j = +1;$$

$$x_{0j} = min\ x_{ij}\ (1 \le i \le m) \text{ при } s_j = -1.$$

У деяких випадках еталонним об'єктом вважають такий, значення показника якого дорівнює середнім арифметичним рівням показників в даній сукупності. Проте в сукупності економічних об'єктів, де переважають асиметричні розподіли, середнє арифметичне в якості характеристики еталонного об'єкта втрачає своє значення.

Іноді пропонується використовувати в якості еталону 100 %-не виконання плану за всіма показниками, наголошуючи цим на небажаність як недовиконання, так і перевиконання плану.

У кожному стовпці матриці $X$ знаходимо найкраще значення показника і утворюємо з них додатковий рядок чисел ($x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$) – показники підрозділу-еталона.

Розрахунок комплексної оцінки $K_i$ кожного $i$-го підрозділу проводиться за формулою евклідової відстані від точки еталону до конкретних значень показників об'єктів

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} k_j (x_{0j} - x_{ij})^2 \qquad (i = \overline{1, m}).$$

Для обчислення "дійсної" відстані між точками $m$-вимірного простору необхідно взяти корінь квадратний із всіх величин $K_i$ $(i = \overline{1, m})$, але, як правило, цю операцію не проводять, оскільки вона не впливає на впорядкованість оцінок.

Коефіцієнти порівняльної значущості $k_j$ необхідні для надання ваги різним показникам відповідно до їх важливості. Чим більшим є $k_j$, тим більш значущим є показник $j$, і тим більшою мірою відхилення від еталону впливатиме на загальну оцінку $K_i$.

Критерій оцінки найкращого підрозділу: $min\ K_i$ $(1 \le i \le m)$.

З розглянутих вище метод відстаней є найбільш формалізованим. Він легко дозволяє враховувати значущість показників, і його ідея визначення оцінок як відстаней між точками-підрозділами і точкою-еталоном є цілком переконливою. Разом з тим і цей метод має ряд недоліків. По-перше, процедура обчислення є складною, а результати не є наочними. По-друге, сама по собі процедура оцінки потребує вдосконалення: варіації різних показників можуть суттєво відрізнятися, а це означає, що показники з більшою варіацією будуть мати більшу вагу у сумарній оцінці, і, отже, вони неявно отримують перевагу порівняно з іншими показниками. Складність і ненаочність методу є однією з перешкод для його широкого застосування, але в наукових дослідженнях на перший план висуваються вимоги обґрунтованості та логічної несуперечливості методу.

*Таксонометричний метод.* Цей метод є узагальненням методу відстаней. Вихідна матриця $X$ попередньо стандартизується, що дозволяє позбутися неявної значущості показників, що виникає за рахунок різної варіації. Матриця перетворюється за формулами:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{x_j}}{\delta_j}; \qquad \overline{x_j} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij};$$

$$\delta_j = \left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_{ij} - \overline{x_j})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

де $\overline{x_j}$ – середнє арифметичне всіх рівнів показника $j$ (стовпця матриці $X$); $\delta_j$ – середнє квадратичне відхилення показника $j$.

Таким чином, кожний стовпець матриці $Z$ є вектором, координати якого в сумі дорівнюють нулю, а довжина цього вектора – одиниці. Матриця $Z$ є вихідною для розрахунку комплексної оцінки. Далі методика розрахунку повністю збігається з методикою методу відстаней.